

Themenheft Mathematische Methoden im CAD
DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission

Baoswan Dzung Wong

Bézierkurven gezeichnet und gerechnet

Ein elementarer Zugang und Anwendungen

orell füssli

Themenheft Mathematische Methoden im CAD
DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission

Baoswan Dzung Wong

Bézierkurven gezeichnet und gerechnet

Ein elementarer Zugang und Anwendungen

Baoswan Dzung Wong

Bézierkurven: gezeichnet und gerechnet

Ein elementarer Zugang und Anwendungen

© 2003 Orell Füssli Verlag AG, Zürich

www.ofv.ch

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf deshalb der schriftlichen Einwilligung des Verlags.

Lektorat: Silvia Bartholdi

Umschlaggestaltung: cosmic Werbeagentur, Bern

Druck: fgb • freiburger graphische betriebe, Freiburg i. Brsg.

ISBN 3-280-04021-3

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Themenhefte der DMK

bisher erschienen:

■ **Astronomie**

Hans Roth: Sternschnuppenn; Astronomische Schnupperstunden mit dem Taschenrechner! 1996
Bestellnummer 02700

■ **Finanzmathematik**

Moritz Adelmeyer: Call & Put; Einführung in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht. 2000
Bestellnummer 02701

■ **Mathematische Methoden im CAD**

Baoswan Dzung Wong: Bézierkurven: gezeichnet und gerechnet; Ein elementarer Zugang und Anwendungen. 2003
Bestellnummer 04021

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	4
1	Einführung: Design und Kurven	7
	1.1 Design	7
	1.2 Kurven	8
2	Geometrischer Zugang: Die Konstruktion	13
	2.1 Konstruktion der Bézierkurve	13
	2.2 Übungen von Hand	17
	2.3 Das Steuern einer Kurve	22
	2.4 Das Kurvenzeichnen automatisieren	25
	2.5 Übungen zum Taschenrechner	30
3	Analytischer Zugang: Die Parameterdarstellung	37
	3.1 Die Parameterdarstellung von Bézierkurven	37
	3.2 Zerlegen	41
	3.3 Ordnungswechsel	42
	3.4 Die Ableitung von Bézierkurven	48
	3.5 Kurvenanpassung	54
4	Bézierflächen	57
	Lösungen zu den Übungen	62
	Literatur, Websites, Bild- und Quellennachweis	86
	Index	87

Vorwort der Herausgeberin

Wer mit Computergrafikprogrammen arbeitet, ist sicherlich schon Begriffen wie «Bézigon» oder «Béziertglättung» begegnet und hat sich dabei vielleicht gefragt, was hinter diesen Namen stecken mag. Beim Lesen des vorliegenden Heftes wird dieses «Geheimnis» gelüftet!

Baoswan Dzung Wong gelingt es auf sehr verständliche und äusserst anregende Weise den – sowohl mathematischen als auch geschichtlichen – Hintergrund einer «Funktionsfamilie» zu durchleuchten.

Mit **Bézierkurven: gezeichnet und gerechnet** hat die Reihe «Themenhefte der DMK» Zuwachs erhalten. Die Autorin stellt in diesem Heft den Bezug zwischen Mathematik und Anwendungen der Mathematik her und gibt vielerlei Anregung für Eigenaktivitäten von Schülerinnen und Schülern.

Die DMK dankt der Autorin, dem Programm «ETH für die Schule» und dem Kanton Aargau für die Unterstützung dieses Projektes und dem Orell Füssli Verlag für die sachkundige verlegerische Betreuung.

Zürich, Sommer 2003

Für die Deutschschweizerische Mathematikkommission

Ursula Eisler, Präsidentin

Vorwort der Autorin

Die grundlegende Arbeit zu diesem Heft entstand im Wintersemester 1999/2000 und wurde durch das Programm «ETH für die Schule» und vom Erziehungsdepartement des Kantons Aargau ermöglicht.

Den Anstoss zum Thema Bézierkurven und Bézierflächen erhielt ich gewissermassen über meine Tochter Wingdzi, indem ich sie zum alljährlichen Kinovergnügen mit Disneys Werken begleitete. Dabei hatte es mir besonders die menschliche Ausstrahlung des vom Computer animierten Teppichs angetan, der Aladdin in guten wie in schlechten Zeiten zur Seite stand.

Bei dieser Arbeit wurde ich in freundlicher Weise von Prof. Dr. Urs Kirchgraber unterstützt. Ohne seine Kommentare und Vorschläge wäre die Arbeit nie so geworden, wie sie jetzt ist. Ich möchte ihm an dieser Stelle von Herzen dafür danken, dass er mich stets ermuntert und grosszügig beraten hat. Ich danke herzlich dem Rektor der aargauischen Kantonsschule Wettingen, Dr. Urs Strässle, dafür, dass ich während jenes Semesters teilweise vom Unterricht freigestellt werden konnte. Ausserdem bin ich meiner Klasse 4dP des Jahres 2000/2001 zu Dank verpflichtet, von deren künstlerischer Begabung ich mich inspirieren liess und die mich beim Testen dieses Materials unbefangen und freundschaftlich beriet. Mein Dank geht auch an die vielen Kollegen und Kolleginnen, namentlich Moritz Adelmeyer, die das Manuskript in einer früheren Fassung gelesen und kommentiert haben. Ebenso danke ich Silvia Bartholdi und ihren Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern vom Orell Füssli Verlag für ihren grossen Einsatz bei der Gestaltung und der Koordination der Drucklegung. Vor allem danke ich aber meiner Familie, besonders meinem Ehemann Shiufei für die Geduld und Unterstützung während der arbeitsreichen Entstehungszeit.

Untersiggenthal, im August 2003

Baoswan Dzung Wong



Abbildung 1
Designobjekt

1.1 Design

Bei manchen Artikeln des täglichen Bedarfs – vom Schriftzug einer Werbung über den Wasserhahn bis zum Auto – ist nicht nur der Inhalt wichtig, sondern auch das Aussehen. Die Gegenstände sprechen uns in erster Linie durch ihre Gestaltung an. Wer sich in der verwirrenden Vielfalt für eine Marke entscheiden muss, tut es oft auf Grund der Gefühle, die das Design in ihm weckt. Vor wenigen Jahren hatten iMac und iBook den Markt erobert, indem sie durch ihre fröhlichen Bonbonfarben und ihre kindlich-runde Form entzückten. Ein Designobjekt war insbesondere das iBook, das aus einem einzigen durchgeformten Stück bestand. Nicht einmal Griffe zeigte es (diese konnten bei Bedarf herausgeklappt werden), welche die Eleganz seiner Umrisslinie gestört hätten. Selbst Autos haben ihre eckigen Formen verloren und sind runder geworden. Autoliebhaber lassen sich nämlich nicht nur von der hoch stehenden Fahrqualität, sondern auch von der Eleganz der Karosserie beeindrucken. Einem wohlgestalteten Auto ist die liebevolle Pflege seines Besitzers gewiss. Ebenso kann die besondere Form eines Flaschenkühlers, einer Puderdose und selbst die schlichte Eleganz eines Wasserhahns dem Auge und der Hand schmeicheln. Design ist also ein nicht wegzudenkender Teil unseres Alltags.

1.2 Kurven

Das erste Handwerk, das ein Designer oder eine Entwerferin beherrschen muss, ist das Zeichnen einer Linie oder Kurve. Der Kurve kommt eine besondere Bedeutung zu: Sie ist das Werkzeug für Grafiker und Designerinnen, um ihren Erzeugnissen Ausdruck zu verleihen. So verbirgt sich eine ganze Wissenschaft hinter dem Entwerfen von Schriftarten. Aber auch einem Firmenlogo kann Gestalt verliehen werden, indem sein Umriss durch eine Kurve definiert wird.

Hilfsmittel: Über Jahrhunderte hinweg waren Zirkel und Lineal die einzigen Hilfsmittel, die zum Zeichnen eingesetzt wurden. Daher konnten nur Kreise und Geraden zuverlässig reproduziert werden. Kompliziertere Kurven wurden mit einem Kurvenlineal (siehe Abb. 2) gezeichnet und mühsam zusammengesetzt.

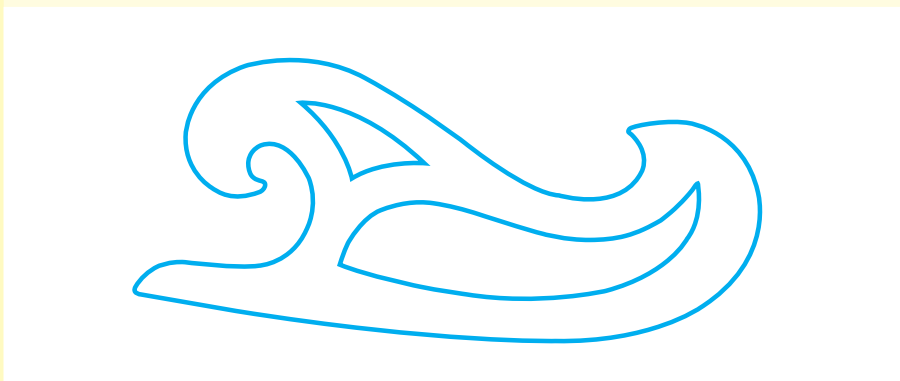


Abbildung 2
Kurvenlineal

Mit dem Anbrechen des industriellen Zeitalters wurde dies zu einem Hindernis bei der Fertigung von Werkzeugen und Flächen. Denn die in Arbeitsteilung gefertigten flächigen Teile passten beim Zusammenfügen nicht mehr zueinander. Es wurde wichtig, dass Kurven auf den Konstruktionsplänen stets gleich und exakt gezeichnet, ebenso metallene Flächenteile in der Fabrikhalle stets gleich und exakt reproduziert werden konnten. Geschwungene Kurven und glatte Flächen sind an jedem Auto zu finden. So waren es auch die Ingenieure PAUL DE FAGET DE CASTELJAU bei Citroën und PIERRE BÉZIER bei Renault, die um 1970 eine Klasse von mathematischen Kurven erfunden haben, welche einfach zu verstehen und leicht zu handhaben sind und sich darüber hinaus vielfältig einsetzen lassen. Es ist die Klasse der Bézierkurven.

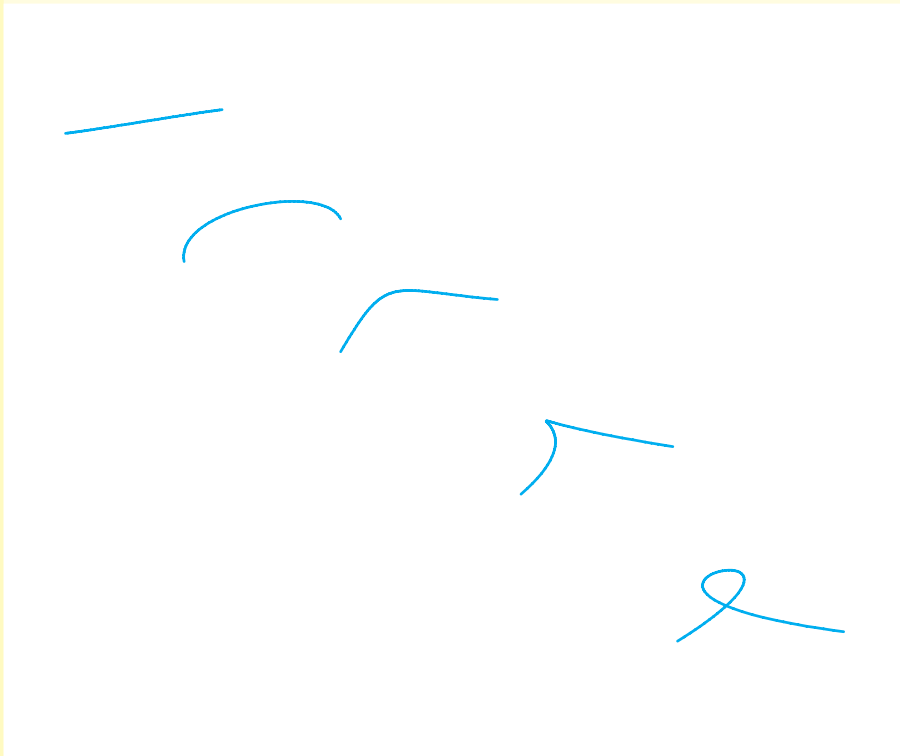


Abbildung 3
Erste Beispiele von
Bézierkurven

Wie die Beispiele in Abbildung 3 erzeugt werden können und was ihre mathematische Eleganz ausmacht, werden Sie in diesem Heft erfahren. Jetzt lassen Sie aber diese Kurven auf sich einwirken. Einige wirken elegant, andere tollpatschig, einige sind voller Dynamik, andere träge und schleppend, einige wirken bescheiden, andere abenteuerlich. Das alles können Bézierkurven sein. Im Vergleich dazu wirken Kurven, die mit Lineal und Zirkel erzeugt wurden, technisch und starr.

1

- a) Werfen Sie einen *kurzen* Blick auf die beiden Kompositionen in Abbildung 4. Auf welchen Bereich in jedem Bild (oben, Mitte, unten) wird Ihr Augenmerk gelenkt?

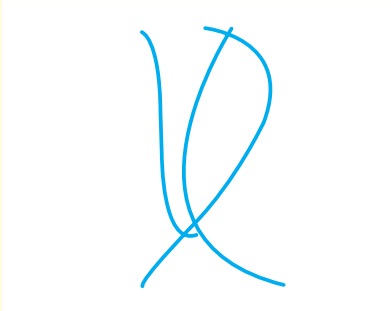


Abbildung 4
Zwei Kompositionen mit
Bézierkurven

- b) In welchem Bild sind **Horizontale und Vertikale** stärker betont?
(Da wir Menschen ständig unter der Einwirkung der Schwerkraft stehen, sind wir sehr stark auf horizontale und vertikale Richtungen bezogen. Fehlen diese, fühlen wir eine gewisse Orientierungslosigkeit. Manchmal ist in der bildenden Kunst diese «Führungslosigkeit» aber erwünscht um z. B. Rebellion auszudrücken.)
- c) Ein anderes Element in diesen Bildern ist die Änderung der **Krümmung**. Die Krümmung lässt sich intuitiv so verstehen: Stellen Sie sich vor, mit dem Fahrrad Kurven zu fahren. Müssen Sie die Lenkstange stark abdrehen, so ist die Kurve dort stark gekrümmt. Können Sie die Lenkstange gerade halten oder müssen diese nur schwach abdrehen, so ist die Kurve nicht oder nur schwach gekrümmt.
Untersuchen Sie, in welchem der beiden Bilder die Krümmungen entlang der jeweiligen Kurven stärker betont sind.
- d) In Aufgabe a) hat wahrscheinlich im rechten Bild die rechte obere Ecke Ihre Aufmerksamkeit zuerst auf sich gezogen, während im linken Bild alle drei Bereiche etwa im Gleichgewicht stehen. Welches Element, b) oder c), ist dafür verantwortlich?

2

Die Buchkunst des Mittelalters lebte von den mit feinsten Sorgfalt und Hingabe von Hand vorgenommenen Abschriften. Später, mit der Erfindung des Buchdrucks¹, wurden die von den Mönchen entwickelten Schriftarten mit hoher Kunst in Metall gegossen. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts waren nur wenige Schriftarten für die Schreibmaschine² und den Buchdruck gebräuchlich. Heute stehen uns eine Fülle von Schriftarten zur Verfügung – von technisch starren Schriftarten über barock verschnörkelte bis zu leicht beschwingten. Im Zeitalter des Computers erlauben uns die Bézierkurven (siehe Übung 43), die Eleganz des Federstrichs auch in den zeitgemässen Schriftarten wieder aufleben zu lassen. Neue Schriftarten entstehen heute mit Leichtigkeit, doch gehen die meisten nach kurzer Zeit unter. Das Entwerfen von Buchstaben ist eine Kunst und erfordert viel Geschick und Erfahrung. Damit ein Buchstabe harmonisch wirkt, müssen Zwischenräume ein angemessenes Gewicht aufweisen. Beachten Sie etwa, dass scheinbar gerade Längsbalken in Wirklichkeit in der Mitte kaum merklich verjüngt sind und so dem Buchstaben seine Geschmeidigkeit verleihen (siehe Abb. 5). Nur jene Schriften haben Jahrhunderte überlebt, die sich durch Klarheit und Eleganz, wie bei einem tadellos geschliffenen Diamanten, auszeichnen. Betrachten Sie in Abbildung 6 den Buchstaben R. Er gilt als der repräsentativste des Alphabets, weil seine Konturen sowohl geradlinige wie kreisbogenförmige und geschwungene Teile in sich vereinigen. Hier wird er in den zwei Schriftarten Courier und Zapf Chancery abgebildet.

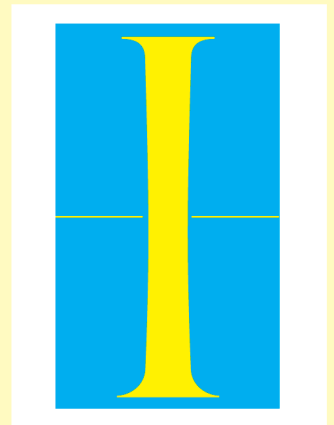


Abbildung 5
Der Buchstabe I, siehe Übung 2



Abbildung 6
Buchstabe R (links Courier; rechts Zapf Chancery)

- In welcher Schriftart gefällt Ihnen der Buchstabe besser?
- Eine der beiden Schriftarten trägt deutliche Spuren der Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Welche? Zeichnen Sie die Kreise ein, die sich in die Bögen des Buchstabens einschmiegen lassen.
- Insgesamt zeigen Buchstaben eine ausgeprägte Ausrichtung nach der Horizontalen und der Vertikalen. Worauf ist das zurückzuführen?
- Untersuchen Sie nun die Änderung der Krümmung. In welchem der beiden ist die Änderung abrupt, in welchem verläuft die Krümmungsänderung sanfter?

¹ um 1450

² erstmals 1873 auf dem Markt, von Sholes & Glidden, USA

- e) Entscheiden Sie auf Grund Ihrer obigen Untersuchungen, welche der beiden Schriftarten nur mit jüngeren Methoden erzeugt werden kann.

Rückblick und Ausblick

- Im Abschnitt 1.2 haben Sie die Bézierkurven unter einem künstlerischen Aspekt betrachtet und sie ein bisschen kennen gelernt.
- Im Kapitel 2 erfahren Sie, wie Bézierkurven erzeugt werden. Sie lernen ein Verfahren kennen, mit dem Sie die Kurven konstruieren können.
- Im Kapitel 3 wird eine Formel hergeleitet, welche die Bézierkurve beschreibt.

Geometrischer Zugang

Wie können Sie einen Computer instruieren, eine Linie zu zeichnen?

Beginnen Sie mit der einfachsten Linie, einer **Strecke**. Sind ihre beiden Endpunkte bekannt, so erhalten Sie jeden dazwischen liegenden Punkt, indem Sie die Endpunkte geradlinig verbinden. Die Koordinaten aller Punkte der Strecke im Computer zu speichern, wäre eine arge Platzverschwendung. Es genügt, nur die Daten der beiden Endpunkte zu archivieren. Die andern Punkte lassen sich einfach daraus bestimmen.



Abbildung 7
Strecke

Wie sieht es bei einer **gekrümmten Linie** aus? Der im nächsten Abschnitt beschriebene Konstruktionsvorgang beruht auf dem Zeichnen geradliniger Strecken und stammt vom französischen Ingenieur de Casteljaeu, der um 1960 beim französischen Autobauer Citroën arbeitete.

2.1 Konstruktion der Bézierkurve

Intuitiv können Sie sich die Methode, um vom Dreieck $P_0P_1P_2$ zu einer gekrümmten Kurve zu kommen, als jene des «Eckenaabschneidens» vorstellen. Auch mit Drahtspannbildern lässt sie sich vergleichen. Diese entstehen folgendermassen: Die Schenkel $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{P_1P_2}$ werden z. B. mit je zwanzig, von links nach rechts nummerierten Nägeln in gleichen Abständen versehen. Danach werden die Nägel mit jeweils gleichen Nummern durch einen Kupferdraht verbunden. Die Drähte umhüllen dann eine gekrümmte Kurve wie in Abbildung 8.

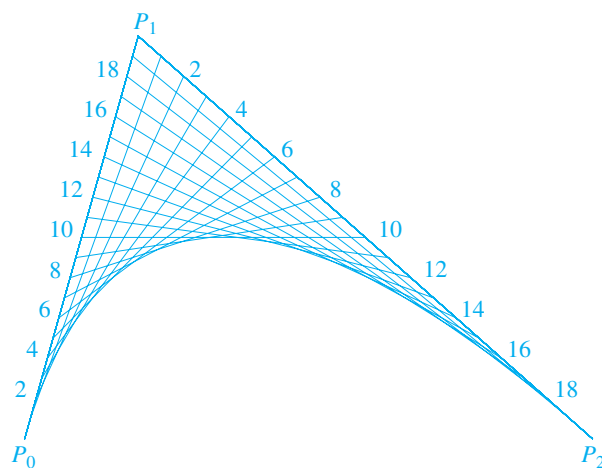


Abbildung 8
Drahtspannbild

«Umhüllen» ist ein vager Ausdruck, um zu beschreiben, welche Kurve hier eigentlich entsteht. Man müsste angeben, welcher Punkt auf dem Draht die Kurve ausmacht. Nach de Casteljau teilt man jeden Draht wieder in 20 Teile, nummeriert sie der Reihe nach, wieder von links nach rechts, und nimmt jenen Teilungspunkt, der dieselbe Nummer trägt wie die Endpunkte, die der Draht verbindet. Dieser Punkt ist dann ein Punkt der gesuchten Kurve. In Abbildung 9 wird der sechste Kurvenpunkt konstruiert, der sich auf dem Draht von 6 nach 6 im Drahtspannbild der Abbildung 8 befindet.

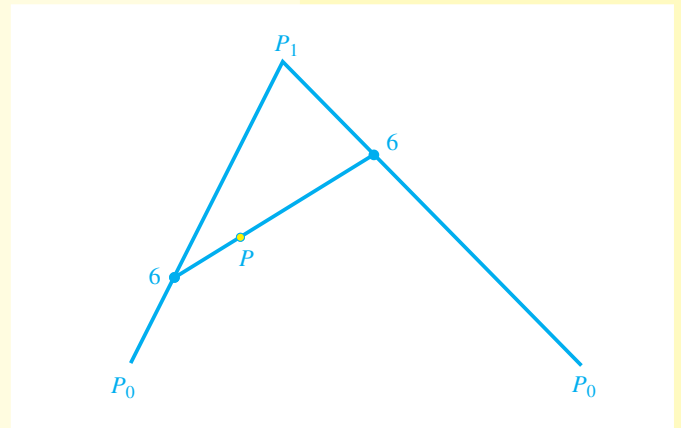


Abbildung 9
Kurvenpunkt auf einem Einzelfaden

Bezeichnungen

- Die so entstandene Kurve heisst **Bézierkurve 2. Ordnung**.
- Von den drei vorgegebenen Punkten bestimmen P_0 und P_2 Anfangs- und Endpunkt, während P_1 die Form der Bézierkurve festlegt. P_0, P_1, P_2 heissen **Kontrollpunkte** der Kurve.
- Die in Abbildung 9 mit der Nummer «6» bezeichneten Punkte teilen die Schenkel $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{P_1P_2}$ je im Verhältnis 6 : 14, was äquivalent ist zu $\frac{6}{20} : \frac{14}{20}$. Allgemein schreiben wir das Verhältnis in der Form $t : (1 - t)$, wobei t , wie hier $t = \frac{6}{20}$, einen Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann. Die variierende Grösse t heisst **Parameter** der Bézierkurve.

Folgende kleine Übung soll zur Wissenssicherung dienen:

Übung

Wissenssicherung

3

- a) Gegeben seien die Punkte P_0, P_1, P_2 in Abbildung 10. Konstruieren Sie genügend viele Punkte der zugehörigen Bézierkurve, sodass Sie eine gute Handskizze der Kurve erstellen können.
- b) Betrachten Sie das Drahtspannbild in Abbildung 8. Wo liegt der «höchste» Punkt einer Bézierkurve 2. Ordnung? Begründen Sie.

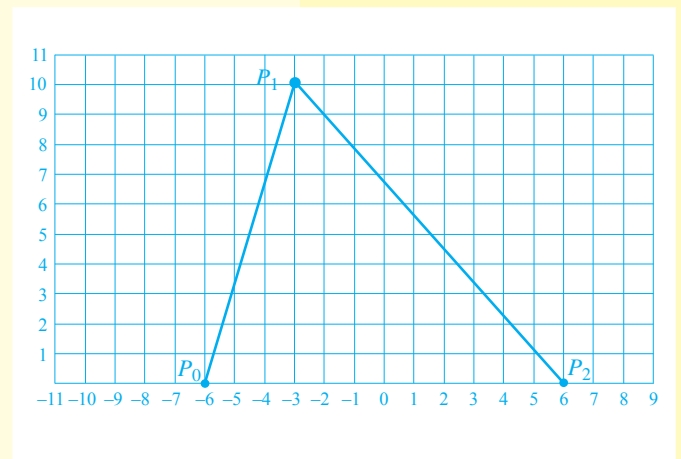


Abbildung 10
Konstruktion einiger Kurvenpunkte aus $P_0P_1P_2$

- c) Sie haben im Mathematikunterricht eine ganze Reihe von Kurven kennen gelernt. Nennen Sie einige und beschreiben Sie, wie Sie sie zeichnen würden. Gibt es Unterschiede zu den Bézierkurven, die Sie eben kennen gelernt haben?

Mit der Vorgabe dreier Punkte P_0, P_1, P_2 erhalten Sie aber immer nur Kurven, die sich gegen eine Seite hin (nämlich von P_0P_2 aus in Richtung P_1) krümmen, also nur solche der braven Sorte, niemals aber solche, die unvermittelt umkehren, sich schlängelnd winden oder verspielt verschlungen sind. Um auch solche Kurven zu erhalten, versuchen Sie es einmal mit der Vorgabe von **vier** Kontrollpunkten. Die Methode des Eckenabschneidens lässt sich auch darauf anwenden.

Übung

Vier Kontrollpunkte

4

Ausgehend von den vier Kontrollpunkten P_0, P_1, P_2, P_3 (siehe Abb. 11), wurde in drei Schritten der Kurvenpunkt S_3 zum Parameterwert $t = \frac{1}{3}$ konstruiert. Schreiben Sie zu jedem Schritt ausführlich den Konstruktionsweg auf, insbesondere, wie die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, R_2, R_3 und S_3 entstanden sind.

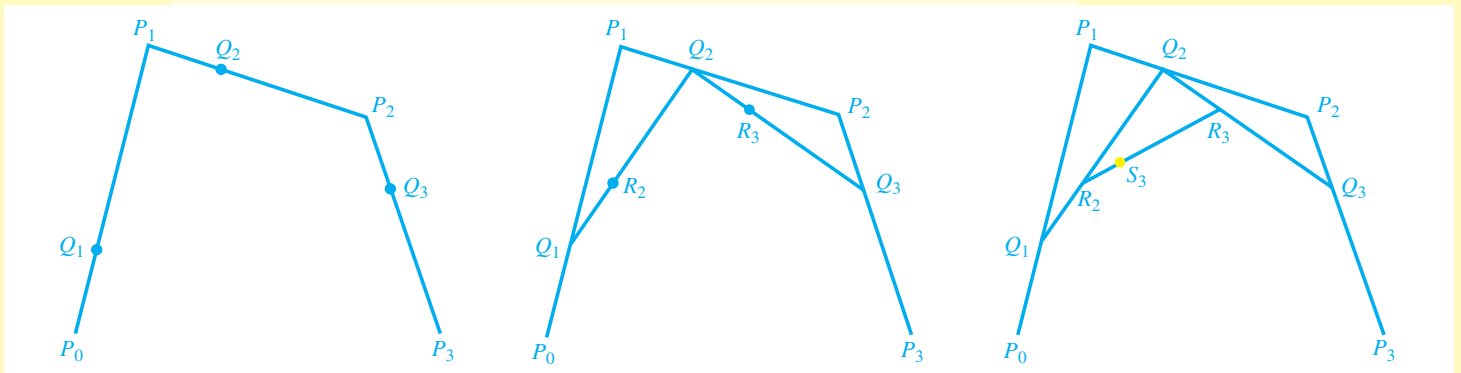


Abbildung 11
«Ohne Worte»

Definition: Die auf diese Weise gewonnene Kurve heisst **Bézierkurve 3. Ordnung**.

Übung

Fünf Kontrollpunkte

5

Wie lässt sich die Methode auf fünf gegebene Kontrollpunkte erweitern? Konstruieren Sie zu den Punkten P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 in Abbildung 12 denjenigen Punkt der Bézierkurve 4. Ordnung, der zum Parameterwert $t = \frac{3}{10}$ gehört.

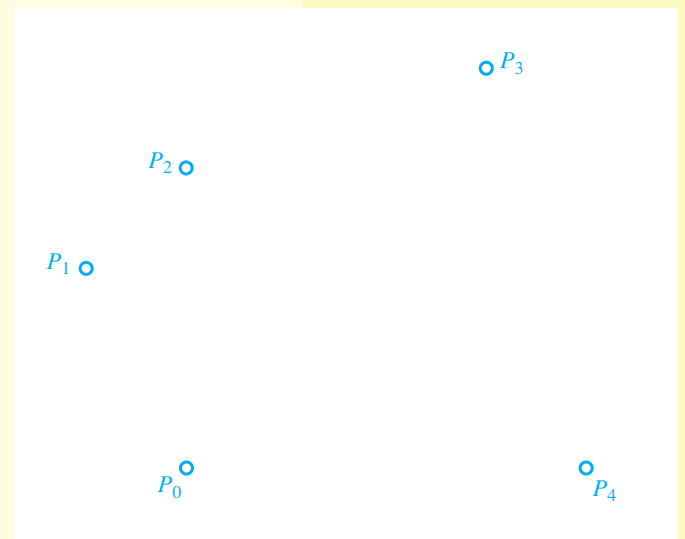


Abbildung 12
Konstruktion mit fünf
Kontrollpunkten

In diesem Heft werden, wenn nicht anders vermerkt, Bézierkurven 3. Ordnung betrachtet, weil sie für die meisten Fälle vielfältig und allgemein genug sind. Zuweilen genügen sogar Bézierkurven 2. Ordnung.

Einige Merkmale von Bézierkurven

■ Reproduzierbarkeit

Für eine Bézierkurve 3. Ordnung brauchen Sie nur die vier Punkte P_0 , P_1 , P_2 , P_3 zu kennen. Die Konstruktion der Kurvenpunkte ist dann durch das Rezept vollständig festgelegt. Auf diese Weise kann die zu den Punkten P_0 , P_1 , P_2 , P_3 gehörende Bézierkurve jederzeit und überall exakt reproduziert werden. Sie entzieht sich so – obwohl von einer frei von Hand gezeichneten inspiriert – dem Willen und den Launen des Menschen. Dieses mathematische Rezept nennen wir nach seinem Erfinder den **Algorithmus von de Casteljau**.

Kurven können auch durch Funktionsterme erzeugt werden. Auch das ist ein Beispiel eines Algorithmus. In Kapitel 3 lernen Sie, Bézierkurven durch Funktionsterme zu beschreiben.

■ Datenkompression

Eine Kurve besteht aus unendlich vielen Punkten. Sie zu kennen, heisst, die Koordinaten aller ihrer Punkte zu kennen. Weder Mensch noch Computer können unendlich viele Zahlen speichern. Man muss sich also für alle praktischen Zwecke auf solche Kurven beschränken, die aus gewissen Angaben, den *Daten*, und einer Hand voll Regeln, einem so genannten *Algorithmus*, erzeugt werden können. Der Algorithmus von de Casteljau ist ein schönes Beispiel dafür. Gemessen an der – in Gedanken möglichen – Auflistung aller Punkte einer Kurve ist das Beschreiben eines Algorithmus, der die Kurve erzeugt, viel effizienter. Man komprimiert gewissermassen die unendlich vielen Punkte, die eine Kurve ausmachen, in ein paar Kontrollpunkte und Regeln.

■ Kontrollpunkte

Die Kontrollpunkte lassen sich in zwei Klassen einteilen, nämlich in solche, durch welche die Bézierkurve geht, und in solche, an die sie sich bloss nähert.

Nur der erste und der letzte Punkt (P_0 bzw. P_3) sind Kurvenpunkte. Sie sind zugleich Anfangs- und Endpunkt der Kurve und heissen daher auch **Ankerpunkte** der Kurve.

Die mittleren Punkte (P_1 und P_2) liegen nicht auf der Kurve. Sie regeln aber den Verlauf der Kurve zwischen P_0 und P_3 . Man nennt sie **Führungspunkte**. Werden P_1 oder P_2 verändert, so hat dies eine Verformung der ganzen Kurve zur Folge. Näheres dazu in Abschnitt 2.3.

2.2 Übungen von Hand

Übung

6

Drei Kontrollpunkte

Gegeben sind die Kontrollpunkte $P_0(0|0)$, $P_1(5|10)$, $P_2(20|0)$ in Abbildung 13.

- Konstruieren Sie nach der Methode von de Casteljau die Punkte, die zum Teilungsverhältnis $t : (1 - t)$ gehören, wobei t nacheinander $\frac{0}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, \dots , $\frac{8}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{10}{10}$ sei. (Verteilen Sie die Arbeit auf die Klasse.)
- Verfertigen Sie auf Karton ein Fadenspannbild, dessen Fäden den Verlauf der Konstruktionslinien zeigen, welche die zugehörige Kurve umhüllen.

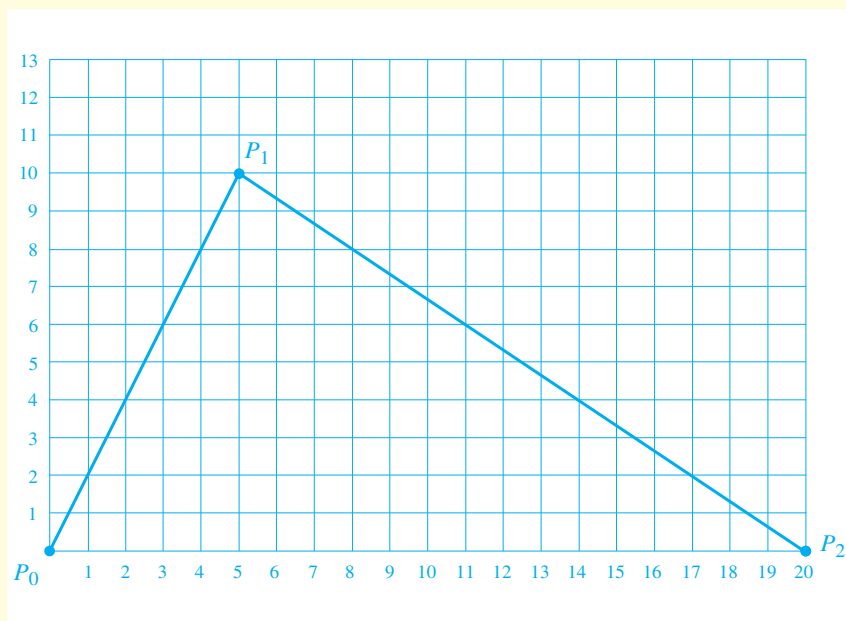


Abbildung 13
Dreieckiges Kontrollpolygon

Übung

7

Vier Kontrollpunkte in den Ecken eines Quadrates

In Abbildung 14 liegen die Kontrollpunkte in den Ecken eines Quadrates der Seitenlänge 10. Zeichnen Sie die Figuren auf kariertes Papier und konstruieren Sie für jedes Kontrollpolygon nach der Methode von de Casteljau die Punkte, die zum Teilungsverhältnis $t : (1 - t)$ gehören. Wählen Sie für t nacheinander $\frac{0}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, \dots , $\frac{8}{10}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{10}{10}$. Benutzen Sie die Symmetrien!

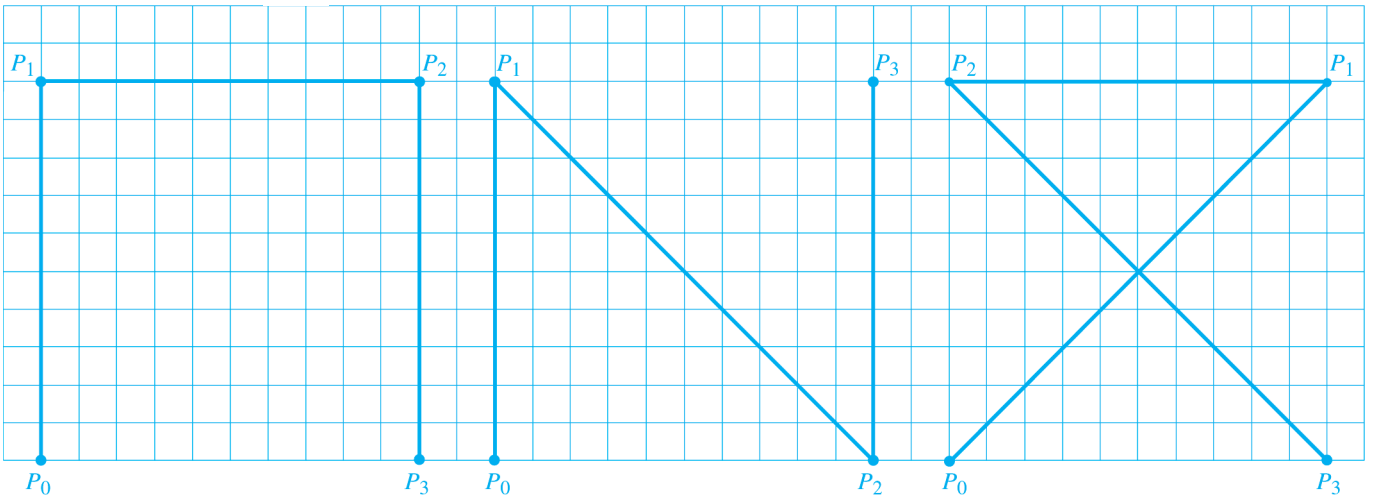


Abbildung 14
Quadratische Kontrollpolygone
in den Formen U, N und X

Übung

8

Vier Kontrollpunkte – gleichschenkliges Trapez

Betrachten Sie in Abbildung 15 das Kontrollpolygon $P_0(-10|0)$, $P_1(-4|8)$, $P_2(4|8)$, $P_3(10|0)$.

- Konstruieren Sie die Bézierkurve, die zu diesem Kontrollpolygon gehört.
- Lesen Sie die Koordinaten von $P(\frac{1}{2})$ – dem Kurvenpunkt, der zum Parameterwert $\frac{1}{2}$ gehört – ab.
- Welches sind die Koordinaten von $P(\frac{1}{2})$, wenn das gleichschenklige Trapez allgemein die Höhe h hat und die Grundlinie sich von $P_0(-\frac{g}{2}|0)$ bis $P_3(\frac{g}{2}|0)$ erstreckt?

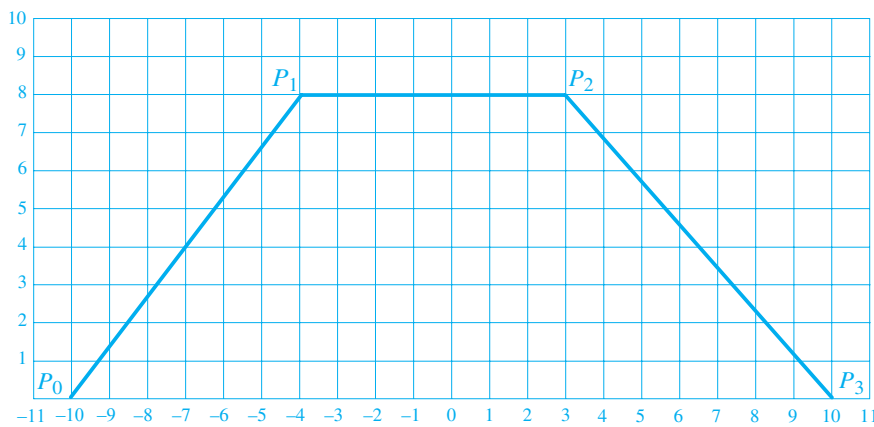


Abbildung 15
Trapezförmiges Kontrollpolygon

Bezeichnung: $P(\frac{1}{2})$ ist der Kurvenpunkt, der zum Parameterwert $t = \frac{1}{2}$ gehört. Er wird zuweilen auch «parametrischer Mittelpunkt» der Kurve oder kurz «Kurvenmittelpunkt» genannt.

9

Erklären Sie, weshalb die Bézierkurven in den Endpunkten stets tangential zu den Polygonseiten, die diese Endpunkte enthalten, verlaufen.

Anmerkung: Hier ist es passend, die Definition der Tangente aus der Analysis zu benutzen. Unter einer **Tangente** an eine Kurve im Punkt P_0 versteht man jene Gerade t , der sich eine Folge von Sekanten s durch P_0 und Q nähert, wenn der zweite Schnittpunkt Q entlang der Kurve an den Punkt P_0 heranrückt.

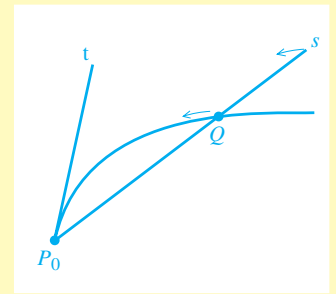


Abbildung 16
Tangente an P_0

Angenommen, Sie möchten eine gewisse schwungvolle Linie durch eine Bézierkurve erzeugen, dann besteht Ihre Aufgabe darin, zu dieser Kurve die Kontrollpunkte zu finden. Für Bézierkurven der 2. Ordnung und gewisse der 3. Ordnung ist dies leicht zu lösen (vgl. Übungen 10 und 11).

Bézierkurve 2. Ordnung – Rekonstruktion der Kontrollpunkte

10

Betrachten Sie die Bézierkurve in Abbildung 17.

- Beweisen Sie, dass der höchste Punkt der Kurve die Mitte der Schwerlinie durch P_1 im Dreieck $P_0 P_1 P_2$ ist.
- Konstruieren Sie die Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2 , die zur vorgegebenen Bézierkurve gehören. Welche Koordinaten haben die konstruierten Punkte?



Abbildung 17
Aus der Kurve das Kontrolldreieck konstruieren

Bézierkurve 3. Ordnung – das Kontrollpolygon

11

- Überlegen Sie, welcher Art ein Viereck sein muss, damit es als Kontrollpolygon einer **symmetrischen** Bézierkurve dienen kann.
- Der Kurvenmittelpunkt $P(\frac{1}{2})$ hat die Koordinaten $(0|6)$. Beweisen Sie, dass die Höhe des Kontrolltrapezes vier Drittel der Höhe von $P(\frac{1}{2})$ über der Grundlinie $P_0 P_3$, also 8, beträgt.
- Konstruieren Sie die Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3 der gegebenen Bézierkurve. Welche Koordinaten haben sie?
- Beweisen Sie: Bildet ein Kontrollpolygon $P_0 P_1 P_2 P_3$ in dieser Reihenfolge ein allgemeines Trapez, dann ist die Höhe der Kontrollpunkte P_1 und P_2 über der Grundlinie $P_0 P_3$ gleich vier Drittel der Höhe des Kurvenmittelpunktes $P(\frac{1}{2})$ über der Grundlinie.

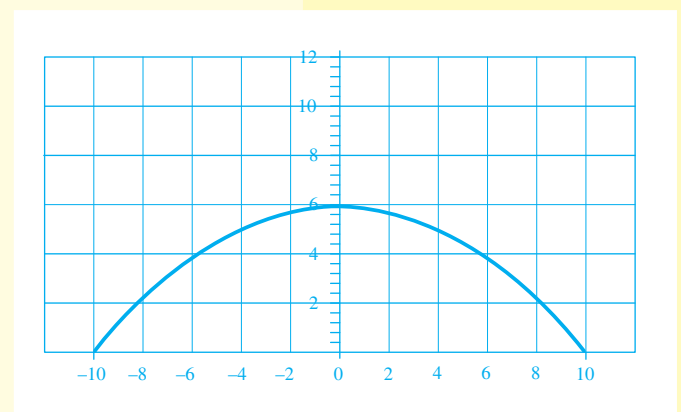


Abbildung 18
Aus der Kurve das Kontrolltrapez konstruieren

12

In Grafikprogrammen wie AppleWorks, Freehand, Adobe Illustrator, usw. sind Bézierkurven als Werkzeuge eingebaut. In der AppleWorks-Zeichenumgebung z. B. wählen Sie aus der Palette das so genannte Bézigon und erzeugen damit eine Bézierkurve wie folgt:

1. Definieren Sie Anfangspunkt *A* und Endpunkt *B* der Kurve. Das erreichen Sie, indem Sie auf der Zeichenebene des Bildschirms die Stelle *A*, wo die Kurve beginnen soll, anklicken, dann mit der Maus an die Stelle *B*, wo die Kurve enden soll, hinfahren und dort doppelt klicken. Damit wird die Kurve **verankert**.
2. Nun wird auf dem Bildschirm eine Strecke von *A* nach *B* angezeigt. Mit dem Befehl **Umformen** können Sie die Gerade nach Gutdünken in eine Kurve verziehen, indem Sie die Ankerpunkte anklicken und dadurch die ursprünglich versteckten **Griffe**, auch **Umformzeiger** genannt, sichtbar machen und anschliessend an den Endpunkten *C* bzw. *D* der Griffe ziehen und drehen. Sie beobachten, wie die Kurve sich dabei mitbewegt, und zwar so, dass sie sich entlang den Griffen anschmiegt – je länger die Griffe sind, umso stärker –, um sich dann geschmeidig zum anderen Ankerpunkt, entlang dessen Griff, hinüberzuschwingen.

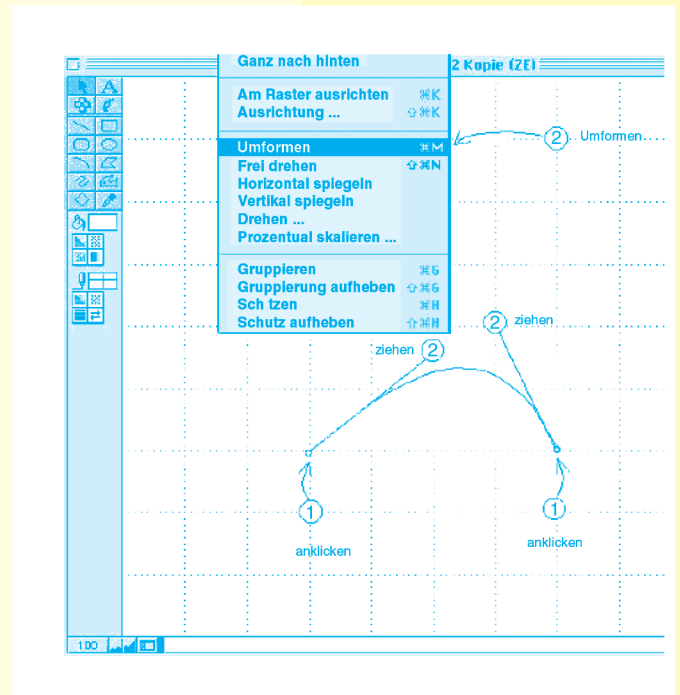


Abbildung 19
Kommerzielle Grafiksoftware

- a) Spielen Sie mit den Griffen und beobachten Sie, in welchem Mass die Kurve sich mitbewegt.
- b) Sie haben sicherlich bemerkt, dass *A* und *B* mit den Kontrollpunkten P_0 und P_3 zusammenfallen. Wie steht es mit *C* und *D*?
Sie könnten so vorgehen, dass Sie eine «einfache» Bézierkurve erzeugen – z. B. eine, die als Kontrollpolygon ein Trapez mit Grund- und Decklinie auf Rasterlinien hat. Die Griffe verschwinden nach Beenden des Umformens wieder, deshalb empfiehlt es sich, deren Endpunkte *C* und *D* mit Kreislein zu markieren. Drucken Sie Ihre Zeichnung aus und konstruieren Sie nach Übung 11 die zugehörigen Kontrollpunkte. Was fällt Ihnen auf?
- c) Wenn Sie in b) geantwortet haben, dass *A*, *B*, *C* und *D* den vier Kontrollpunkten P_0 , P_1 , P_2 und P_3 entsprechen, dann müsste die zugehörige Bézierkurve von der 3. Ordnung sein. Überprüfen Sie das, indem Sie die in Übung 11d) gefundene Eigenschaft¹ nachweisen.

¹ Bei Bézierkurven der 3. Ordnung beträgt die Kurvenhöhe $\frac{3}{4}$ der Trapezhöhe.

Rückblick und Ausblick

■ Auffinden der Kontrollpunkte

Oft steht man vor der Aufgabe, eine Kurve, sei sie von Hand erzeugt oder vor dem inneren Auge entstanden, durch Bézierkurven wiederzugeben. Das bedeutet, dass passende Kontrollpunkte dazu gefunden werden müssen. Für gewisse Kurven haben Sie in den Übungen 10 und 11 die Antworten gefunden:

1. Bézierkurve 2. Ordnung

Die Endpunkte der Kurve sind stets P_0 und P_2 . M sei die Mitte der Grundlinie $\overline{P_0P_2}$ und N der höchste Punkt der Kurve. Durch Verdoppeln der Strecke \overline{MN} von M aus erhält man den noch fehlenden Kontrollpunkt P_1 .

2. Bézierkurve 3. Ordnung

Die Endpunkte der Kurve sind stets P_0 und P_3 . Falls die Kontrollpunkte ein Trapez bilden, so legen Sie in den Kurvenendpunkten «von Auge» die Tangenten, auf welchen sich die mittleren Kontrollpunkte P_1 und P_2 befinden werden. Deren genaue Lage finden Sie so: Die Höhe des Trapezes, d. h. die Höhe der Kontrollpunkte über der Grundlinie $P_0 P_3$, ist gleich vier Drittel der Kurvenhöhe über dieser Grundlinie.

■ Bedeutung im Design

Fachleute im Design sind in den wenigsten Fällen an der Mathematik der Kurven interessiert. Sie sind in erster Linie darauf bedacht, ihre Arbeit gut und schnell zu erledigen. Die oben genannten geometrischen Eigenschaften der Bézierkurven kommen ihrem ausgeprägten geometrischen Gespür insofern entgegen, als sie aus ihren von Hand gezeichneten Entwürfen ablesen können, wo sie den ersten und den letzten Kontrollpunkt, also P_0 und P_3 , platzieren sollen. Ebenso können sie abschätzen, wie die Tangenten in diesen Endpunkten verlaufen. Also setzen sie die weiteren Kontrollpunkte P_1 und P_2 entlang der Tangenten in P_0 bzw. in P_3 , und zwar umso weiter weg vom Kurvenendpunkt, je mehr sich die Kurve der Tangente anschmiegt.

In Übung 12 haben Sie gesehen, dass in der kommerziellen Grafiksoftware mit Bézierkurven 3. Ordnung gearbeitet wird.

- Damit kann fürs Erste eine Kurve erzeugt werden. Bei Bedarf lässt sich die Zeichnung leicht korrigieren. Ein Gefühl dafür, wie sich das Versetzen von Kontrollpunkten auf die Kurve auswirkt, vermittelt der nächste Abschnitt.

2.3 Das Steuern einer Kurve

Dieser Abschnitt ist für das Verständnis der weiteren Kapitel nicht notwendig und kann übersprungen werden. Wenn Sie aber dabeibleiben, werden Sie eine angenehme Eigenschaft der Bézierkurven kennen lernen und verstehen, warum Bézierkurven bei Grafikern und Konstrukteurinnen so beliebt sind.

Zeichnen ist eine schöpferische Tätigkeit. Eine Linie in einem Bild, das im Entstehen begriffen ist, bleibt selten so, wie sie zu Beginn aufs Papier gebracht wurde. Der Zeichner will im Verlauf der Arbeit die Linienführung ändern können. Insbesondere dann, wenn eine vom Computer erzeugte Linie nicht seinen Vorstellungen entspricht. Mit anderen Worten, er möchte mit dem Computer kommunizieren können und sich nicht von dessen Erzeugnissen beherrschen lassen. Zeichenprogramme, die diesen direkten Dialog zulassen, heißen **interaktiv**.

Bézierkurven eignen sich in hohem Masse für das interaktive Arbeiten am Bildschirm. Wie sich eine einmal erzeugte Kurve korrigieren lässt, soll nun gezeigt werden.

- (i) Setzen einer Kurve:
Angenommen, eine Designerin möchte die Umrisslinie eines Produktes entwerfen. Sie setzt einige wenige Kontrollpunkte in ihre Zeichenebene. Der Computer zeichnet dann die Kurve nach der Methode von de Casteljau.
- (ii) Steuern der Kurve:
Da sie die Kontrollpunkte vielleicht aufs Geratewohl gesetzt hat, wird die vom Computer erzeugte Kurve nicht auf Anhieb perfekt sein. Macht nichts – sie braucht nicht von vorn anzufangen!
Oft reicht es, nur einen einzigen Kontrollpunkt zu verändern. Angenommen, die Kurve sei der Designerin zu steil oder zu flach geraten: Sie kann sie niederdrücken oder emporheben, indem sie z. B. den mittleren Kontrollpunkt tiefer oder höher setzt. Die neue Kurve wird flacher oder steiler, und zwar wird sie sich (im Vergleich zum Kontrollpunkt) etwa um einen Drittel von der ursprünglichen Kurve entfernen (siehe Übung 13).

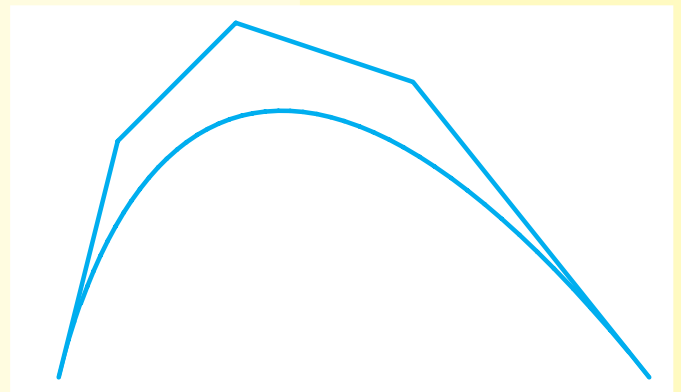


Abbildung 20
Provisorische Kurve mit
Kontrollpolygon

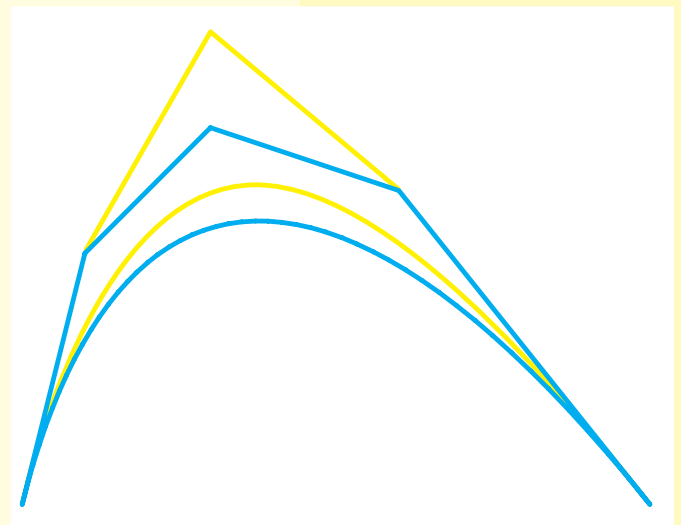


Abbildung 21
Provisorische und korrigierte
Kurve mit altem (blauem) und
neuem (gelbem)
Kontrollpolygon

Zur Veranschaulichung stellen Sie sich vor, dass in den Kontrollpunkten Magnete sitzen, die auf die Kurve eine anziehende Wirkung haben: Werden die Magnete verschoben, so ziehen sie die Kurve mit. Fast wie im Marionettenspiel wird die Kurve an unsichtbaren Fäden durch die Kontrollpunkte geführt.

Übung

Zupfen an einem Kontrollpunkt

13

Gegeben seien die Kontrollpunkte $P_0(0|0)$, $P_1(0|10)$, $P_2(10|20)$, $P_3(20|10)$, $P_4(20|0)$.

- Konstruieren Sie den Kurvenpunkt $P(\frac{1}{2})$ mittels der Methode von de Casteljau.
- Verschieben Sie den mittleren Kontrollpunkt P_2 um 10 Einheiten in die Höhe (er kommt dann auf $\bar{P}_2(10|30)$ zu liegen) und konstruieren Sie den neuen Kurvenpunkt $\bar{P}(\frac{1}{2})$.
- Um wie viele Einheiten hat sich der neue Kurvenpunkt $\bar{P}(\frac{1}{2})$ gegenüber dem alten $P(\frac{1}{2})$ verändert?
- Wie viel Prozent beträgt die Veränderung des Kurvenpunktes $\bar{P}(\frac{1}{2})$ gegenüber der Veränderung des Kontrollpunktes P_2 ?

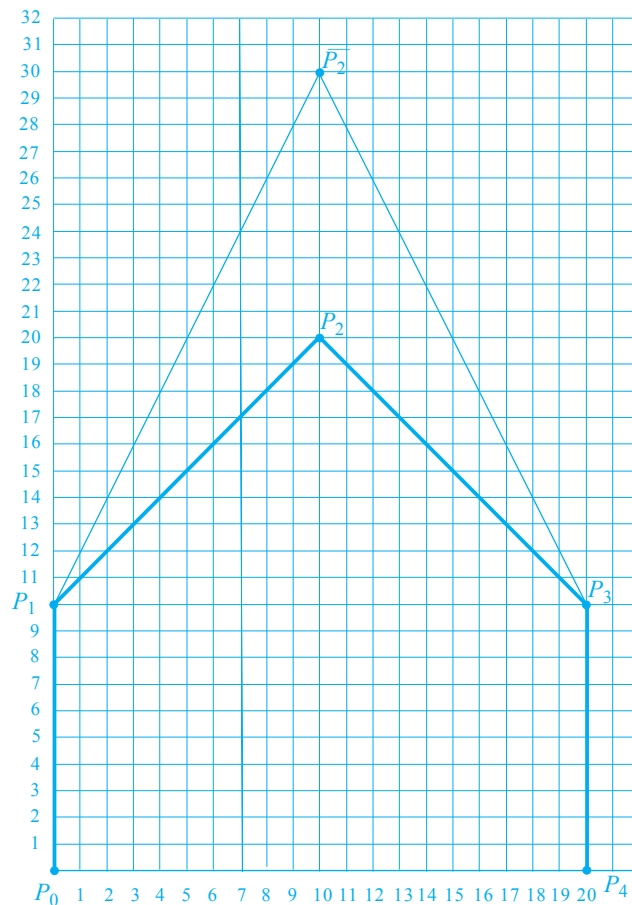


Abbildung 22
 P_2 nach \bar{P}_2 ziehen

Rückblick und Ausblick

- Dass Bézierkurven in hohem Masse geometrisch manipuliert werden können, macht sie besonders angenehm. Ein Konstrukteur braucht nicht über mathematische Kenntnisse zu verfügen, kann nach rein ästhetischem Gutdünken entscheiden und oft schon durch Veränderung eines einzelnen Kontrollpunktes die Kurve wirksam steuern.
- In der metallverarbeitenden Industrie wird meist mit 3, 4 oder 5 Kontrollpunkten gearbeitet. Da macht die Änderung der Kurve jeweils etwa einen Drittel der Änderung des Kontrollpunktes aus. Eine entsprechende Aussage über Bézierkurven mit einer beliebigen Anzahl von Kontrollpunkten können Sie anhand der Rechnung geben, wenn Sie die Parameterdarstellung der Bézierkurven kennen (siehe Kapitel 3).
- «Wenn die Bézierkurve schon nicht durch die Kontrollpunkte geht, um wie viel weicht sie denn von ihnen ab?» Diese Frage lässt sich nicht beantworten, weil es auf die Konfiguration *aller* Kontrollpunkte ankommt. Die Entfernung zu den Kontrollpunkten ist auch kein Kriterium. Was eine Modelleurin von Autokarosserien mehr bewegt, ist, welche Wirkung eine Veränderung der Kontrollpunkte auf die Bézierkurve ausübt. Wie Sie eben in den Übungen erfahren haben, macht die Veränderung der Kurve nur etwa einen Drittel der Veränderung eines Kontrollpunktes aus. Mit anderen Worten, die Kurve reagiert nur gedämpft auf das «Verwackeln» der Kontrollpunkte. Ein schwaches Zupfen an einem Kontrollpunkt hat nie eine heftige Reaktion der Kurve zur Folge. Die Kurve lässt sich gewissermassen nicht so leicht aus der Ruhe bringen. Das ist es auch, was die ruhige Eleganz der Bézierkurven ausmacht. Man sagt, die Bézierkurven haben eine **variationsvermindernde** Eigenschaft.

2.4 Das Kurvenzeichnen automatisieren

Die immer wiederkehrenden gleichen Konstruktionsschritte machen am Anfang Spass. Man eignet sich Routine an, die es erlaubt, mit schlafwandlerischer Sicherheit die Kurve zu erzeugen. Doch bevor das Vergnügen zum Überdruß wird, sollte man sich nach Hilfsmitteln umschaun, welche die mechanische Arbeit abnehmen. Der Grafiktaschenrechner ist ein solches Hilfsmittel. Damit können Sie die von Hand ausgeführten Konstruktionen Schritt für Schritt nachahmen.

In diesem Kapitel werden Erläuterungen von Programmbefehlen dort, wo sie gebraucht werden, eingestreut¹. Die Befehle sind mit dem Zeichen • markiert.

- Mit dem Befehl `Pt-On(3,6)` bzw. `PtOn 3,6` zeichnet der Rechner einen Punkt mit den Koordinaten (3|6).
- Mit dem Befehl `Pt-Change(3,6)` bzw. `PtChg 3,6` schaltet der Rechner den Punkt um, d. h., falls die Umgebung weiss ist, auf Schwarz und umgekehrt.
- Mit dem Befehl `Line(3,6, 5.1, -2.3)` bzw. `Line 3,6, 5.1,-2.3` verbindet der Rechner die Punkte mit den Koordinaten (3|6) und (5.1|-2.3).

Beispiel:

Es seien $P_0(0|0)$, $P_1(0|5)$, $P_2(5|5)$, $P_3(5|0)$ gegeben. Tippen Sie folgende Befehle ein:

```
Line(0,0,0,5)   bzw.   Line 0,0,0,5
Line(0,5,5,5)   bzw.   Line 0,5,5,5
Line(5,5,5,0)   bzw.   Line 5,5,5,0
```

Der Taschenrechner zeichnet den nebenan abgebildeten Polygonzug $P_0P_1P_2P_3$, falls das Fenster geeignet gewählt ist. Sonst helfen folgende Befehle, die den `Line`-Befehlen vorangestellt werden müssen:

- `ClrDraw` löscht die zuvor gezeichneten Kurven und gibt den Grafikbildschirm für die neue Zeichnung frei.
- `ClrHome` gibt den Display für die neuen Eingaben frei.
- `ZSquare` bzw. `ZoomSqr` bewirkt, dass auf den beiden Koordinatenachsen die Einheiten gleich lang gewählt werden, sodass die Zeichnung unverzerrt erscheint.

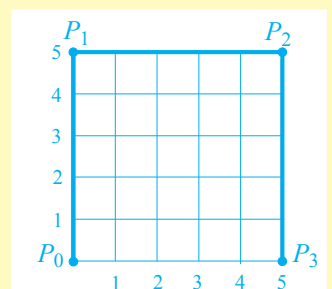


Abbildung 23
Kontrollpolygon zum nebenstehenden Beispiel

¹ Angegeben sind die Befehle für die beiden Rechner TI-83 bzw. TI-89. Wenn Sie einen anderen Taschenrechner haben, werden Sie sicherlich die entsprechende Anpassung finden.

14

Gegeben seien die vier Punkte $A(10|2)$, $B(-6|4)$, $C(5|-9)$, $D(7|20)$. Durch Umordnen können aus diesen vier Punkten verschiedene Polygonzüge gezeichnet werden.

- Wie viele verschiedene Polygonzüge gibt es?
- Schreiben Sie ein Taschenrechnerprogramm, das einen dieser Polygonzüge zeichnet.
Damit Sie nicht bei jedem Testlauf die Ausgangspunkte im Programm verändern müssen, lassen Sie die Eingabe variabel:
 - Die x -Koordinate des Punktes A geben Sie im TI-83 so ein:
:Input "AX=", A
Im TI-89 dürfen Sie längere Variablenamen wählen:
:Input "ax=", ax
- Testen Sie Ihr Programm anhand einiger Zahlenbeispiele.

15

In der Konstruktion von de Casteljau müssen jeweils Strecken geteilt werden. Da der Taschenrechner jedoch nur rechnen kann, muss die Konstruktion in eine Formel übersetzt werden.

In Abbildung 24 ist

$$\overline{AT} : \overline{TB} = t : (1 - t)$$

Projiziert man die Punkte A , T , B entlang der gestrichelten Vertikalen auf die x -Achse, so gilt natürlich dasselbe Teilungsverhältnis. Daher ist

$$(x_T - x_A) : (x_B - x_T) = t : (1 - t) \quad (1)$$

Löst man nach x_T auf, so erhält man

$$x_T = (1 - t) \cdot x_A + t \cdot x_B \quad (2)$$

Ebenso gilt

$$y_T = (1 - t) \cdot y_A + t \cdot y_B$$

Vektoriell¹ geschrieben, lautet die Formel für den Ortsvektor des Teilungspunktes

$$\vec{r}_T = (1 - t) \cdot \vec{r}_A + t \cdot \vec{r}_B$$

- Zeigen Sie die fehlenden Schritte, die von Gleichung (1) zu Gleichung (2) führen.
- Wie lautet die Formel für einen Teilungspunkt T , der \overline{AB} im Verhältnis $\frac{3}{10} : \frac{7}{10}$ teilt?

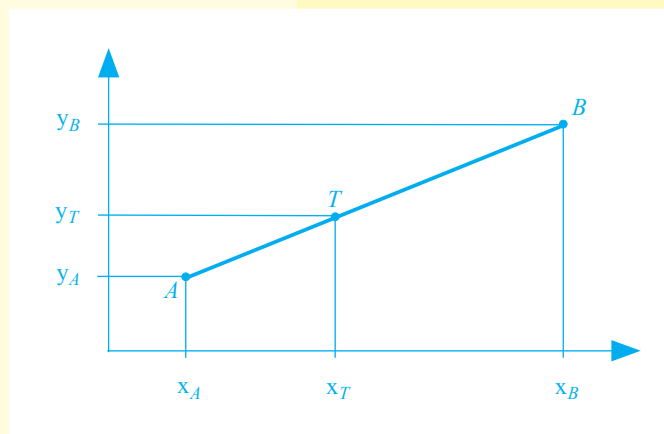


Abbildung 24
Teilung der Strecke \overline{AB} im Verhältnis $t : (1 - t)$

¹ In Kap. 2 und 3 arbeiten wir meistens in der Ebene, in Kap. 4 im 3-dimensionalen Raum.

Bezeichnung: \vec{r}_T wird durch \vec{r}_A und \vec{r}_B ausgedrückt, indem \vec{r}_A und \vec{r}_B mit den Faktoren $(1-t)$ bzw. t versehen und dann addiert wird. Man sagt auch, \vec{r}_T sei eine **lineare Kombination** von \vec{r}_A und \vec{r}_B ; linear, weil \vec{r}_A und \vec{r}_B nur in der ersten Potenz und nicht etwa quadratisch oder in komplizierterer Form auftreten.

Übung

16

Konstruktion von de Casteljau für $t = \frac{3}{10}$

Im Folgenden soll einfachheitshalber \vec{r}_0 für $\vec{r}_{P_0} = \overrightarrow{OP_0}, \dots, \vec{r}_3$ für $\vec{r}_{P_3} = \overrightarrow{OP_3}$ stehen.

- a) Leiten Sie für das Teilungsverhältnis $\frac{3}{10} : \frac{7}{10}$ die Formeln her für
- $\vec{r}_{Q_1}, \vec{r}_{Q_2}, \vec{r}_{Q_3}$ ausgedrückt durch $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$
 - $\vec{r}_{R_2}, \vec{r}_{R_3}$ ausgedrückt durch $\vec{r}_{Q_1}, \vec{r}_{Q_2}, \vec{r}_{Q_3}$
 - \vec{r}_{S_3} ausgedrückt durch $\vec{r}_{R_2}, \vec{r}_{R_3}$
- b) Erweitern Sie das Programm aus Übung 14 so, dass der Taschenrechner alle in der de casteljauschen Methode gebrauchten Teilungspunkte berechnet.
- Um Tipparbeit zu sparen, kopieren Sie das vorhergehende Programm und verändern dann die Teile nach Bedarf.
 - Benützen Sie den Zuordnungsbefehl $7/10 * p0x + 3/10 * p1x \rightarrow q1x$. Das Zeichen \rightarrow erzeugen Sie mit der STO ▸-Taste.

Übung

17

Konstruktion von de Casteljau für allgemeines t

- a) Wie lauten die Formeln für die in der de casteljauschen Methode vorkommenden Teilungspunkte $\vec{r}_{Q_1}, \dots, \vec{r}_{R_2}, \dots$ und \vec{r}_{S_3} bei allgemeinem Parameter t ?
- b) Verändern Sie Ihr Taschenrechnerprogramm so, dass es die Teilungspunkte nicht nur für den Parameter $t = \frac{3}{10}$ berechnet, sondern für t von 0 bis 1 in lauter Zehntelsschritten.
- Benützen Sie für die wiederholte Berechnung den Befehl `For(T,0,1, 0.1)` bzw. `For t,0,1, 0.1`. Am Schluss der zu wiederholenden Befehlsgruppe schliessen Sie die For-Schleufe mit dem Befehl `End` bzw. `EndFor` ab.

18

Lassen Sie das vorhergehende Programm laufen, so können Sie zuschauen, wie ein Geflecht von Konstruktionslinien sich um die eigentliche Bézierkurve legt. Die Konstruktionslinien umhüllen gewissermassen die Kurve. Dieses Phänomen kennen Sie vom Fadenspannbild aus Übung 6.

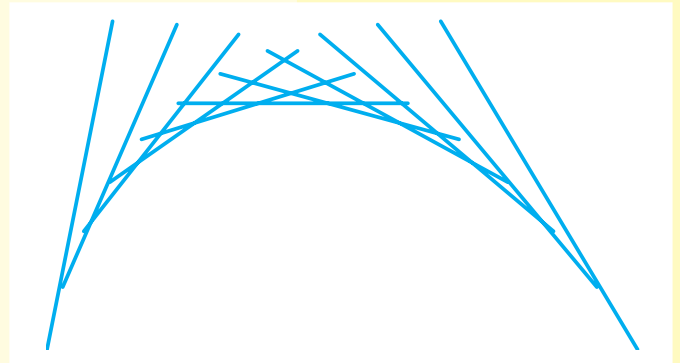


Abbildung 25
Umhüllende einer Bézierkurve

- a) Wandeln Sie das vorhergehende Programm erneut um, indem Sie alle Konstruktionslinien $\overline{Q_i Q_{i+1}}$ entfernen und nur die Strecken $\overline{R_2 R_3}$ belassen.
- b) Schauen Sie Ihrem Taschenrechner zu, wie er Strecke um Strecke hinlegt: Ein fröhliches Spiel, wie dasjenige eines Jongleurs, der seine Keule von einer Hand zur andern wirft. Wie liegen diese Strecken $\overline{R_2 R_3}$ zur Bézierkurve? (Beweis folgt im Kapitel über die Ableitung in Übung 47).

19

Verändern Sie Ihr Programm nochmals, bis es nur noch die Bézierkurve, ohne die Konstruktionslinien, zeichnet. Damit eine dichte Kurve gezeichnet wird, wählen Sie für den Parameter t eine kleinere Schrittlänge.

20

Vielleicht wollen Sie sich nicht mit den Koordinaten der Kontrollpunkte herumschlagen, sondern viel lieber die Punkte intuitiv auf dem Grafikbildschirm setzen. Der Taschenrechner soll dann selber die Koordinaten herauslesen. Wenn Sie einen TI-89 haben (beim TI-83 geht das nicht), dann geschieht das folgendermassen:

- Die Cursorpositionen auf dem Grafikbildschirm liest der Taschenrechner TI-89 mit den Koordinaten x_c und y_c ein. Diese Koordinaten können wie in den vorhergehenden Programmen unter den Adressen $p0x$ und $p0y$ usw. abgespeichert werden. Daher können

die Input-Zeilen	:Input "p0x=",p0x	:Input "p0y=",p0y	usw.
durch die Zeile	:Input :xc → p0x	:yc → p0y	usw.

 ersetzt werden.

Wenn Sie das gemacht haben, dann wird beim Aufrufen des Programmes der Grafikbildschirm gezeigt. Nun bewegen Sie den Cursor mit Hilfe der Cursor-tasten so weit, bis Sie den gewünschten Ort erreicht haben. Bestätigen Sie die Position durch Drücken der ENTER-Taste. Haben Sie auf diese Weise alle vier Kontrollpunkte eingegeben, so zeichnet der Taschenrechner anschliessend die Kurve.

Eine weitere Möglichkeit ist die tabellarische Eingabe der Kontrollpunkte:

$$\begin{bmatrix} p0x & p0y \\ p1x & p1y \\ p2x & p2y \\ p3x & p3y \end{bmatrix}$$

Eine solche Anordnung von Zahlen nennen wir auch eine **Matrix**. Da diese Matrix 4 Zeilen und 2 Kolonnen hat, handelt es sich um eine so genannte 4×2 -Matrix. Hier enthält die erste Zeile die Koordinaten des ersten Kontrollpunktes P_0 , die zweite Zeile die Koordinaten des zweiten Kontrollpunktes P_1 usw. Diese Art der Eingabe hat den Vorteil, dass sie rasch ist, weil nicht auf die Aufforderung für die nächste Eingabe gewartet werden muss. Ausserdem kann eine falsche Eingabe auch im Nachhinein korrigiert werden. Überdies ist die Eingabe jederzeit abrufbar, sodass man später nachschauen kann, was man früher eingegeben hat.

Die Eingabe der Matrizen auf dem TI-83 oder dem TI-89 kann auf verschiedene Arten geschehen. Am einfachsten ist die Eingabe über eine Liste. Dabei werden Elemente in derselben Zeile durch Kommas abgetrennt, während die Zeilen durch Strichpunkte abgetrennt werden. Die Kontrollmatrix

$$\text{k1mx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \\ 5 & 5 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

wird also so eingegeben:

- : [0,0; 0,5; 5,5; 10,0] \rightarrow k1mx oder
- : [[0,0][0,5][5,5][10,0]] \rightarrow k1mx

Damit die Zahlen aus der Kontrollmatrix später im Programm zu verwenden sind, muss einzeln auf sie zugegriffen werden können. Das geschieht z. B. so: $\text{k1mx}[4,1]$ ist die Zahl aus der 4. Zeile in der 1. Kolonne, im Beispiel also die Zahl 10.

Wenn Sie die Zahlen aus der Kontrollmatrix durch folgende Anweisungen in den üblichen Adressen ablegen, können Sie den darauf folgenden Teil des alten Programmes unverändert übernehmen.

- :k1mx[1,1] \rightarrow p0x :k1mx[1,2] \rightarrow p0y
- :k1mx[2,1] \rightarrow p1x :k1mx[2,2] \rightarrow p1y usw.

22

Bis jetzt haben Sie den Taschenrechner nur einzelne Bézierkurven zeichnen lassen. Manche Zeichnungen – das Grasbüschel in Abbildung 26 ist ein Beispiel – lassen sich nicht aus einer einzigen Bézierkurve erzeugen. Erst das Zusammenspiel mehrerer solcher Kurventeile, auch **Segmente** genannt, kann ein hübsches Bild ergeben.

Schreiben Sie ein Programm, das mehrere Béziersegmente in ein Koordinatensystem zeichnet. Das Programm soll nach der Anzahl n der Segmente fragen. Dann soll es das Programm aus Übung 19 oder aus Übung 20 n -mal aufrufen und jedesmal ein Segment hinzufügen.

- Damit das vorhergehende Segment nicht bei jedem Aufruf gelöscht wird, müssen Sie zuvor die Befehle `ClrDraw` und `ZSquare` bzw. `ClrDraw` und `ZoomSqr` aus dem Programm der Übung 19, 20 oder 21 entfernen.

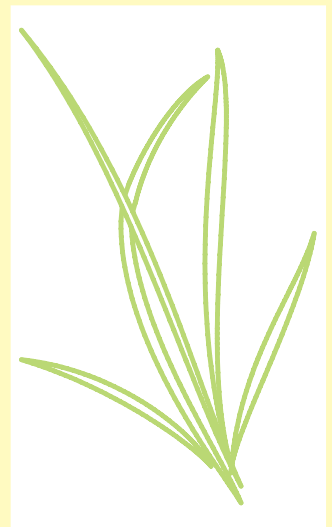


Abbildung 26
Grasbüschel als Kette von Béziersegmenten

2.5 Übungen zum Taschenrechner

Im vorhergehenden Abschnitt haben Sie Programme geschrieben, mit welchen sich mühelos Bézierkurven zeichnen lassen. Diese Programme werden jetzt angewandt, um die verschiedensten Bézierkurven zu zeichnen und zugleich deren Eigenschaften zu erkunden.

23

Die Kontrollpolygone seien gegeben durch

- $P_0(5|0), P_1(0|5), P_2(10|15), P_3(0|15)$ (Engelshaar, siehe Abbildung 27)
- $P_0(0|0), P_1(5|0), P_2(10|15), P_3(0|10)$ (Herzhälfte, siehe Abbildung 27)
- $P_0(0|0), P_1(20|15), P_2(0|10), P_3(10|0)$ (Schleife, siehe Abbildung 27)

Lassen Sie den Taschenrechner die zugehörigen Bézierkurven zeichnen und tragen Sie die Kurven in die nachstehende Abbildung ein.

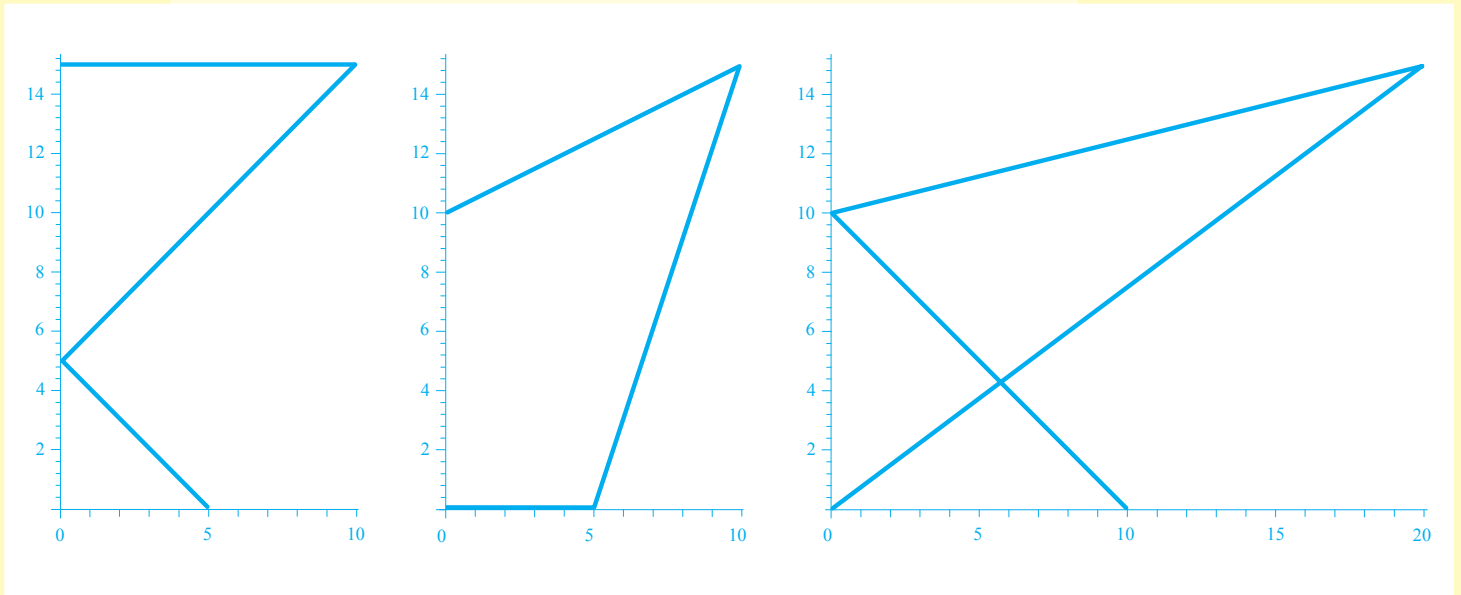


Abbildung 27
zu Übung 23 a)

zu Übung 23 b)

zu Übung 23 c)

Übung

Wanderung eines Kontrollpunktes

24

Gegeben sei das Kontrollpolygon $P_0(5|0)$, $P_1(7|5)$, $P_2(x|-8)$, $P_3(16|0)$, wobei x nacheinander -8 , -4 , 0 , 4 , 8 durchlaufe. Lassen Sie sich jeweils die zugehörige Kurve konstruieren. Was passiert mit der Kurve, wenn P_2 wandert?

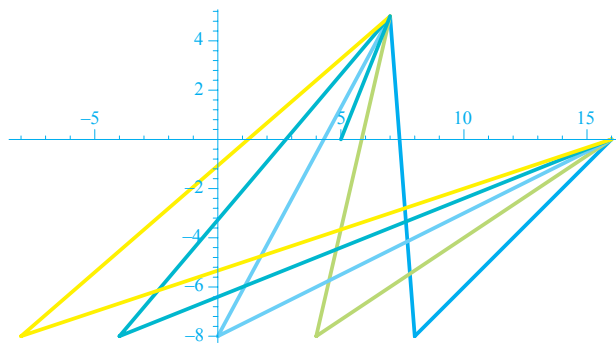


Abbildung 28
 P_2 wandert von links nach rechts

25

- a) **Intuitive Definition der konvexen Hülle:**
 Stellen Sie sich vor, dass Sie auf einem Brett dort Nägel einschlagen, wo sich die Kontrollpunkte befinden. Dann umspannen Sie die Nägel mit einem Gummiband, und zwar so, dass es keine Einbuchtungen gibt. Das so eingeschlossene Gebiet heisst **konvexe Hülle** der Kontrollpunkte. Zeichnen Sie die konvexen Hüllen der Kontrollpunkte aus Übung 23 a) bis c).
- b) **Geometrische Definition der konvexen Hülle:**
1. Eine Punktmenge heisst **konvex**, wenn mit je zwei Punkten der Punktmenge die ganze Verbindungsstrecke zu ihr gehört.
 2. Die **konvexe Hülle** der Punkte P_0, \dots, P_n ist die kleinste konvexe Menge, die alle diese Punkte P_0, \dots, P_n enthält.

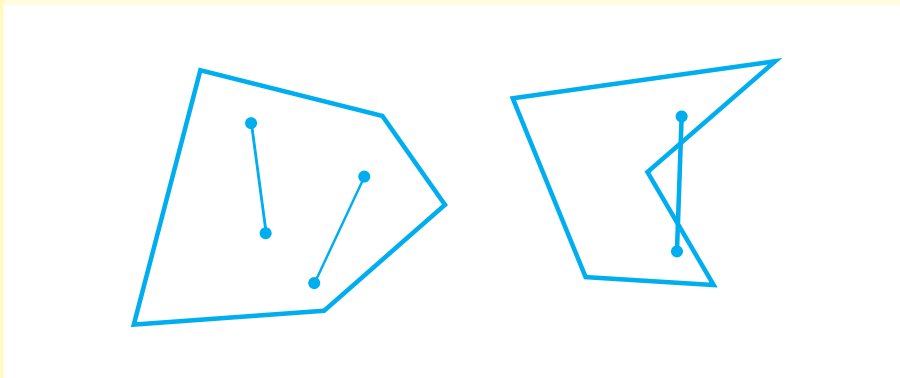


Abbildung 29
 Konvexe und nicht konvexe Gebiete

Überzeugen Sie sich davon, dass in Abbildung 29 die linke Figur konvex, die rechte aber nicht konvex ist. Erklären Sie, weshalb Bézierkurven stets innerhalb der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte verlaufen.

26

Wählen Sie die vier Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden und konstruieren Sie wieder nach de Casteljau die Punkte der in P_0 und P_3 eingespannten Bézierkurve. Welche Gestalt hat a) das Kontrollpolygon, b) die konvexe Hülle der Kontrollpunkte, c) das Kurvenstück?

27

Betrachten Sie das «überschlagene» Quadrat (d. h., die Seiten P_0P_1 und P_2P_3 überschlagen sich wie in einem Feldsessel) in Abbildung 14 rechts. Lassen Sie P_1P_2 symmetrisch anwachsen (siehe Abb. 30):

- a) $P_1(10|10+n)$, $n > 0$, d. h. $\overline{P_1P_2}$ bewegt sich vertikal nach oben.
- b) $P_1(10+n|10)$, $n > 0$, d. h. $\overline{P_1P_2}$ dehnt sich horizontal seitwärts aus.
- c) $P_1(10+n|10+n)$, d. h. $\overline{P_1P_2}$ dehnt sich diagonal entlang $y = \pm x$ aus.
- d) $P_1(10+n|m(10+n))$, d. h. $\overline{P_1P_2}$ dehnt sich entlang der Geraden $y = \pm mx$ aus.

Unter welcher Bedingung ist die Bézierkurve bei symmetrischen Kontrollpolygonen verschlungen?

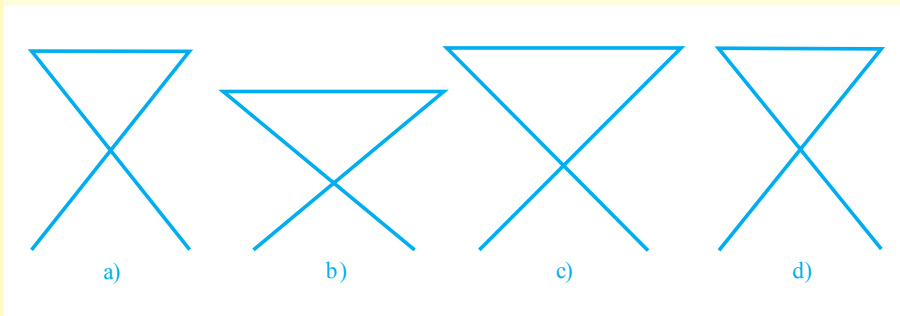


Abbildung 30
Kontrollpolygone in Form eines Feldsessels

28

Wie müssen fünf Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 gesetzt werden, damit

- a) eine geschlossene Bézierkurve, etwa in der Form eines Tropfens, entsteht?
- b) eine geschlossene Bézierkurve ohne Knicke, etwa in der Form einer Erbse, entsteht?

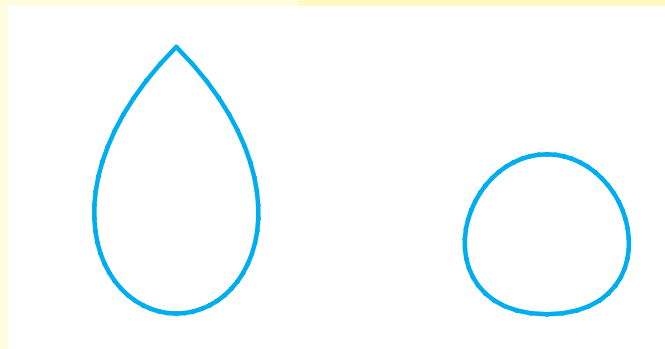


Abbildung 31
Tropfen und Erbse

29

Es seien die beiden ersten Kontrollpunkte $P_0(-10|0)$, $P_1(-7|15)$ gegeben. Wie müssen die Kontrollpunkte P_2 und P_3 gewählt werden, damit eine Bézierkurve 3. Ordnung entsteht, welche

- a) symmetrisch bezüglich der y -Achse ist?
- b) symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist?

30

Was unterscheidet eine Bézierkurve 2. Ordnung von einer Bézierkurve 3. Ordnung, bei welcher der mittlere Kontrollpunkt doppelt auftritt ($P_1 = P_2$), wenn Anfangs- und Endpunkt der beiden Kurven gleich sind?

31

Jetzt wissen Sie, wie Bézierkurven erzeugt werden. Im Internet finden Sie unter dem Suchwort «Bézier» Websites, die interaktive Applets anbieten.

- Suchen Sie mindestens zwei solcher Websites unter Angabe folgender Merkmale: URL-Adresse, Autor bzw. Autorin, Datum (Websites verändern sich schnell).
- Spielen Sie etwas damit. Bestätigen Sie dabei die in den Übungen 9, 25, 27, 28, 29 gewonnenen Erkenntnisse über Tangenten in den Endpunkten, Gebiet des Kurvenverlaufes, verschlungene, symmetrische oder geschlossene Kurven mit und ohne Knick.
- Manche Websites geben auch den Programmcode des Applets an. Vergleichen Sie ihn mit Ihrem Taschenrechnerprogramm.

32

Mit einem dynamischen Geometriesystem wie Cabri Géomètre, Cinderella usw. lässt sich die Konstruktion von de Casteljau dynamisieren. Hier werden die dafür wichtigsten Befehle für das Cabri Geometry auf TI-92 Plus kurz beschrieben¹:

- Um in das *Cabri Geometry* Programm zu gelangen:

```
APPS  1:Flash Apps  Cabri Geometry
Cursor New
Type: Figure
Folder: main
Variable: (Name eingeben)
```

- Um eine *Strecke* zu zeichnen:

```
F2  5:Segment
Cursor (zum Anfangspunkt bewegen) This Point  ENTER
Cursor (zum Endpunkt bewegen) On This Segment  ENTER
```

- Um einen *Punkt auf der Strecke* zu definieren:

```
F2  2:Point on Object
Cursor (zum gewünschten Punkt auf der Strecke bewegen) On This
Segment  ENTER
```

¹ Eine Einführung ins Cabri Geometry erhält man z. B. in [Dreiseidler et al. 2002]

4. Um einen *Abstand* zu messen:
 - F6 1:Distance
 - Cursor (zum Anfangspunkt bewegen) From This Point ENTER
 - Cursor (zum Endpunkt bewegen) To That Point ENTER
 5. Um einen *Quotienten* aus gewonnenen Grössen zu berechnen:
 - F6 6:Calculate
 - Cursor (zur ersten Zahl bewegen) ENTER :
 - Cursor (zur zweiten Zahl bewegen) ENTER ENTER R: (Resultat wird angezeigt)
 6. Um einen Punkt zu *strecken*:
 - F5 3:Dilation
 - Cursor (zum zu streckenden Punkt bewegen) Dilate This Point ENTER
 - Cursor (zum Streckungszentrum bewegen) With Respect To This Point ENTER
 - Cursor (zum Streckfaktor bewegen) Using This Factor ENTER
 7. Um die *Bahn* eines sich bewegenden Punktes anzuzeigen:
 - F7 2:Trace On Cursor (zum Bahnpunkt bewegen) This Point ENTER
 - F7 3:Animation Cursor (zum Teilpunkt auf Strecke bewegen) This Point ENTER
 - Hand Cursor (einige Sekunden rechts oder links, dann loslassen)
 8. Um eine *animierte Konstruktion* anzuzeigen:
 - F1 1:Pointer Cursor (zum sich verändernden Punkt bewegen) This Point ENTER
 - F7 3:Animation Hand Cursor
 9. Um eine Konstruktion zu *löschen*:
 - F8 7>Delete Cursor (zum zu löschenden Objekt bewegen, z. B. einen Punkt) This Point ENTER
- a) Konstruieren Sie einen Punkt der Bézierkurve nach der Methode von de Casteljau (siehe Anleitung 1–6).
 - b) Programmieren Sie anschliessend die Animation so, dass bei sich veränderndem Teilungsverhältnis die Bahn des zugehörigen Bézierpunktes gezeigt wird (siehe Anleitung 7).
 - c) Programmieren Sie nun die Animation so, dass bei sich veränderndem Kontrollpunkt P_2 die zugehörige Konstruktion gezeigt wird (siehe Anleitung 8).

Rückblick und Ausblick

- Dass die Kurve sich innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte (siehe Übung 25) bewegt, verhindert, dass sie zwischen den Kontrollpunkten wild ausschlägt, sich also vorhersehbarer als z.B. Parabeln verhält (siehe Übung 56).
- Die Kurve ist nur dann geradlinig, wenn die Kontrollpunkte auf einer Geraden liegen (siehe Übung 26).
- Die Kurve ist verschlungen, wenn die Tangenten sich in den Kurvenendpunkten «stark genug» kreuzen. «Stark genug» heisst im Falle von trapezförmigen Kontrollpolygonen, dass die Decklinie länger als die Grundlinie ist (siehe Übung 27 und Übung 50).
- Die Kurve ist geschlossen, wenn der erste und der letzte Kontrollpunkt zusammenfallen. Der Übergang hat dort keinen Knick, wenn P_1P_{n-1} durch P_n geht (siehe Übung 28).
- Die Kurve ist achsen- bzw. punktsymmetrisch, falls die Kontrollpunkte achsen- bzw. punktsymmetrisch liegen (siehe Übung 29).
- Dupliziert man den mittleren Kontrollpunkt einer Bézierkurve 2. Ordnung, so wird sie zwar zu einer Bézierkurve 3. Ordnung, aber sie verändert dabei ihre Form (siehe Übung 30). Es ist möglich, eine so genannte **Graderhöhung** vorzunehmen, ohne dass die Bézierkurve ihre Form verändert. Durch geeignete Wahl der Kontrollpunkte kann eine Bézierkurve stets in eine Bézierkurve höherer Ordnung von unveränderter Form verwandelt werden. Das wird das Thema in Abschnitt 3.3 über Graderhöhung sein.
- In diesem Kapitel wurden vorwiegend geometrische Eigenschaften von Bézierkurven untersucht. Im nächsten Kapitel soll es um ihre analytischen Eigenschaften gehen.

Analytischer Zugang

In Kapitel 2 wurde die Bézierkurve geometrisch untersucht. Sie wurde ja auch auf geometrischem Wege gewonnen, nämlich durch fortgesetztes Teilen und Verbinden. Sie erinnern sich:

Ausgehend vom Kontrollpolygon haben Sie die Strecken in gewissen Verhältnissen geteilt, die so erhaltenen Punkte verbunden, dann die neuen Strecken wieder im gleichen Verhältnis geteilt. Dabei hat sich die Anzahl der Strecken um 1 verringert. Das haben Sie so oft gemacht, bis Sie einen einzigen Punkt erhielten. Die Bézierkurve bestand dann aus lauter solchen Punkten. Selbst der Taschenrechner hat nichts anderes gemacht, als durch fortgesetztes Teilen und Verbinden die Punkte der Kurve zu erzeugen.

Vielleicht haben Sie sich gefragt, ob man dieses Verfahren nicht abkürzen könnte. Immerhin haben Sie viele Zwischenpunkte konstruiert, die am Schluss nicht mehr gebraucht wurden. Im Taschenrechnerprogramm aus Übung 19 haben Sie alle Konstruktionslinien wieder verschwinden lassen. Liesse sich nicht eine Formel herleiten, in welcher der Kurvenpunkt direkt durch die Kontrollpunkte ausgedrückt wird, ohne dass die Zwischenpunkte bekannt sind – eine Formel, die auf einer Zeile Platz hat und nicht aus einer langwierigen Folge von Anweisungen besteht?

3.1 Die Parameterdarstellung von Bézierkurven

Übung

33

Herleitung der Formel

Schauen Sie sich nochmals das Taschenrechnerprogramm aus Übung 19 an:

```
...
: For t, 0, 1, 0.1
: (1 - t) * p0x + t * p1x → q1x
: (1 - t) * p1x + t * p2x → q2x
: (1 - t) * p2x + t * p3x → q3x
: (1 - t) * q1x + t * q2x → r2x
: (1 - t) * q2x + t * q3x → r3x
: (1 - t) * r2x + t * r3x → s3x
...
```

Es gibt Ihnen Anhaltspunkte darüber, wie vorzugehen ist. Oben sind nur die Formeln für die x -Koordinaten wiedergegeben. Sie gelten entsprechend auch

für die y -Koordinaten. So geben die beiden Koordinaten $\begin{pmatrix} s3x \\ s3y \end{pmatrix}$ den Ort des Punktes S_3 an, deshalb heisst $\vec{r}_{S_3} = \begin{pmatrix} s3x \\ s3y \end{pmatrix}$ **Ortsvektor** von S_3 .

- a) Beginnen Sie von unten her mit der letzten Zuweisung für S_3 . Der Kurvenpunkt S_3 ist ausgedrückt durch R_2 und R_3 . Vergewissern Sie sich, dass Folgendes gilt:

$$\vec{r}_{S_3} = (1-t) \cdot \vec{r}_{R_2} + t \cdot \vec{r}_{R_3}$$

- b) Setzen Sie für R_2 und R_3 die Formeln aus den zwei Programmzeilen darüber ein. Nun haben Sie S_3 durch Q_1 , Q_2 und Q_3 ausgedrückt.
 c) Setzen Sie wiederum die Formeln aus den drei nächsthöheren Programmzeilen ein. Jetzt erhalten Sie S_3 ausgedrückt durch die Kontrollpunkte P_0 , P_1 , P_2 und P_3 . Wie lautet die Formel?

Übung

Gewichtetes Mittel

34

Zur Erinnerung: In Übung 15 haben Sie den Ortsvektor des Teilungspunktes T als Linearkombination der Ortsvektoren der Endpunkte der Strecke \overline{AB} schreiben können:

$$\vec{r}_T = (1-t)\vec{r}_A + t\vec{r}_B$$

Ähnlich haben Sie in Übung 33 den Ortsvektor des Kurvenpunktes $P(t)$ der Bézierkurve als Linearkombination der Ortsvektoren der vier Kontrollpunkte P_0 , P_1 , P_2 und P_3 erhalten:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \underbrace{(1-t)^3} \cdot \vec{r}_0 + \dots + \underbrace{t^3} \cdot \vec{r}_3 \\ &= B_0(t) \cdot \vec{r}_0 + \dots + B_3(t) \cdot \vec{r}_3 \end{aligned}$$

Jetzt sind die Vorfaktoren näher zu untersuchen:

$$\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^3 \\ B_1(t) &= 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \\ B_2(t) &= 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \\ B_3(t) &= t^3 \end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Vorfaktoren in der Tabelle.

t	$\vec{r}(t) = B_0(t)\vec{r}_0$	+	$B_1(t)\vec{r}_1$	+	$B_2(t)\vec{r}_2$	+	$B_3(t)\vec{r}_3$
$\frac{1}{10}$	$\vec{r}(\frac{1}{10}) = \dots \vec{r}_0$	+	$\dots \vec{r}_1$	+	$\dots \vec{r}_2$	+	$\dots \vec{r}_3$
$\frac{5}{10}$	$\vec{r}(\frac{1}{2}) = \dots \vec{r}_0$	+	$\dots \vec{r}_1$	+	$\dots \vec{r}_2$	+	$\dots \vec{r}_3$
$\frac{9}{10}$	$\vec{r}(\frac{9}{10}) = \dots \vec{r}_0$	+	$\dots \vec{r}_1$	+	$\dots \vec{r}_2$	+	$\dots \vec{r}_3$

- b) Markieren Sie das richtige Wort:
 Je kleiner t , umso *näher/entfernter* befindet sich der Kurvenpunkt $P(t)$ beim Kontrollpunkt P_0 . Dies äussert sich dadurch, dass in der Formel für $\vec{r}(t)$ der Beitrag des Ortsvektors \vec{r}_0 umso *grösser/kleiner* ist.
 c) Es sei $t = \frac{1}{10}$. Wie gross sind die prozentualen Anteile der Ortsvektoren \vec{r}_0 , \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 in der Linearkombination für $\vec{r}(\frac{1}{10})$?

- d) Berechnen Sie die Summe der prozentualen Anteile je für $t = \frac{1}{10}$, $t = \frac{5}{10}$, $t = \frac{9}{10}$. Was fällt Ihnen auf?

In Übung 34 haben Sie gesehen, dass die Vorfaktoren $B_0(t), \dots, B_3(t)$ die Anteile angeben, mit welchen die Ortsvektoren $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ in der Linearkombination für $\vec{r}(t)$ auftreten. Es kommen also je nach Wert, den der Parameter t annimmt, verschiedene Anteile von $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ vor. Man sagt, $\vec{r}(t)$ sei das **gewichtete Mittel** der Vektoren $\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_3$, weil die «Gewichts» funktionen $B_0(t), \dots, B_3(t)$ angeben, wie stark $\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_3$ in der Linearkombination bewertet werden.

Übung

35

Bernsteinpolynome

Betrachten Sie nochmals die Gewichtsfunktionen

$$\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^3 \\ B_1(t) &= 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \\ B_2(t) &= 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \\ B_3(t) &= t^3 \end{aligned}$$

Im Folgenden sollen Sie die Gesetzmässigkeiten in deren Bildung herausfinden.

- Wie verändern sich die Potenzen von $(1-t)$ in den Funktionen B_0, B_1, B_2, B_3 ?
- Wie verändern sich die Potenzen von t in den Funktionen B_0, B_1, B_2, B_3 ?
- Wie verändern sich die konstanten Faktoren in den Funktionen B_0, B_1, B_2, B_3 ?
- Kommen Ihnen die konstanten Faktoren 1, 3, 3, 1 bekannt vor?

Die Gewichtsfunktionen heissen **Bernsteinpolynome 3. Ordnung**. Sie werden mit $B_i^3(t)$ bezeichnet, wobei

$$B_i^3(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} \quad \text{mit } i = 0, \dots, 3 \quad \text{und } t \in [0, 1].$$

Hier sind $\binom{3}{i}$ die Zahlen aus dem nachfolgend abgebildeten Pascalschen Dreieck und heissen **Binomialkoeffizienten**.

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \end{array}$$

Die Familie von Bézierkurven ist den von freier Hand gezogenen nachempfunden. Ihre Konstruktion ist nahe liegend, wenn man sie etwa als «Eckenabschneiden» versteht. Dass ihre Parameterdarstellung Symmetrien und Strukturen aufweist, haben Sie vielleicht nicht erwartet. Im Nachhinein kann man sie erklären. Dazu ergründen Sie in den folgenden Übungen die Bernsteinpolynome.

Graphen der Bernsteinpolynome

$$\begin{array}{llll} \text{Für } n = 2 \text{ ist} & B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i \cdot (1-t)^{2-i} & i = 0, 1, 2 & t \in [0, 1] \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Für } n = 10 \text{ ist} & B_i^{10}(t) = \binom{10}{i} t^i \cdot (1-t)^{10-i} & i = 0, \dots, 10 & t \in [0, 1] \end{array}$$

- Zeichnen Sie mit Hilfe eines Grafikrechners die Graphen der Bernsteinpolynome für $i = 0, \dots, n$ jeweils in dasselbe Koordinatensystem ein. (Nehmen Sie z. B. $n = 3$ oder $n = 10$.)
- Betrachten Sie für festes n die Hochpunkte der Bernsteinpolynome B_i^n , $i = 0, \dots, n$. Wo befinden sie sich?
- Leiten Sie durch Rechnung her, dass die Maxima der Bernsteinpolynome B_i^n , $i = 0, \dots, n$ gleichmässig über das Intervall $[0, 1]$ verteilt sind. (Zunächst für $n = 3$, dann für allgemeines n . Benützen Sie die Differenzialrechnung.)

Grundeigenschaften der Bernsteinpolynome

- Zeigen Sie, dass $B_i^n(t) \geq 0$ für $t \in [0, 1]$, $i = 0, \dots, n$ (**Positivität**)
- Zeigen Sie, dass $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$ für $t \in [0, 1]$ (**Zerlegung der Eins**)
- Zeigen Sie, dass $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$ für $t \in [0, 1]$, $i = 0, \dots, n$ (**Symmetrie**)

Die geometrische Bedeutung der Eigenschaft b) wird im Rückblick, der auf Übung 57 folgt, erkundet.

Rückblick und Ausblick

- Bernsteinpolynome n -ten Grades sind maximal bei $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{n}$, $t_2 = \frac{2}{n}$, \dots , $t_n = 1$. In diesen gleichmässig verteilten Stellen t_i , $i = 0, \dots, n$ überragt das zugehörige Bernsteinpolynom B_i^n die anderen Bernsteinpolynome B_j^n , $i \neq j$. Daher wird an diesen Stellen t_i der zugehörige Kontrollpunkt P_i am besten approximiert. Das erklärt auch folgenden Sachverhalt: Ziehe ich an einem Kontrollpunkt, so verändert sich zwar die gesamte Bézierkurve, aber am meisten in der Nähe des verschobenen Kontrollpunktes und nur geringfügig anderswo (siehe Übung 24 zum wandernden Punkt, Abb. 58).
- Wird die Reihenfolge der Kontrollzahlen x_i , $i = 0, \dots, n$ umgekehrt, so wird dieselbe Kurve umgekehrt durchlaufen. Das ist eine Folge der Symmetrie der Bernsteinpolynome.

Der geometrische Zugang hat den Vorzug, dass manche Eigenschaften visuell zugänglich sind. Die wiederholt ausgeführten Konstruktionen geben Einsicht in die Eigenschaften der Kurve. Sie inspirieren zu Vermutungen, denen Sie nachgehen können, um sie später geometrisch oder analytisch zu beweisen.

Geschichtliches: Vor 1960 wurden Autokarosserien an Reissbrettern entworfen und von Konstrukteuren für die Fertigung auf exakt vermessene Pläne übertragen. Zur besseren räumlichen Vorstellung wurden Modelle in Gips gegossen oder aus Holz geschnitzt. Bei der anschliessenden Fertigung geschah es dann leider oft, dass die fabrizierten Metallflächen nicht mit dem Modell übereinstimmten und in der Folge verschiedene Teile nicht zueinander passten. Das war ärgerlich. Um dem beizukommen, entwickelte Bézier eine Methode, welche das Erzeugen gewölbter Flächen algorithmisierte. Die Herstellung eines Automobils sollte damit vom Entwurf auf Papier bis zur Fertigung in der Fabrikhalle mittels Computer automatisiert werden.

Bézier berichtet (Bézier [1987] und Farin [1993]), dass es in den Sechzigerjahren des letzten Jahrhunderts viel Überzeugungskraft bei Behörden, Direktionen und Mitarbeitern brauchte, als er seine Methode bei Renault einführen wollte. Es war ja schwer vorauszusehen, ob seine noch nicht erprobte Methode wirklich das hielt, was sie versprach. Insbesondere stiess er bei seinen Konstrukteuren auf Widerstand. Sie hatten in vielen Jahren ihre Techniken und Schablonen entwickelt und waren nicht willens, mit lange gewachsenen Traditionen zu brechen. Erst als er ihnen feierlich versprach, dass ihre Kurven nicht verschwinden sollten, sondern im Gegenteil numerisch aufbereitet und im Herzen des Computers aufbewahrt würden, willigten sie ein, sich mit dem computerunterstützten Entwerfen vertraut zu machen. Das System erwies sich als flexibel und zuverlässig, und die Kurven waren vielseitig. Die Konstrukteure lernten schnell, wie die Kontrollpunkte mit den Kurven zusammenhängen, und bald waren die einstigen Schablonen und Methoden vergessen.

3.2 Zerlegen

Das Bisherige könnte den Anschein erwecken, dass alle Kurven sich durch vier vorgegebene Punkte kontrollieren liessen. Es gibt jedoch sehr einfach aussehende Kurven, denen man mit einer einzigen Bézierkurve nicht beikommen kann. Abbildung 32 zeigt einen Schweif. Den Schweif finden Sie in den verschiedensten Ausführungen als Logo für zahlreiche Produkte – von Colgate bis France Télécom. Der Schweif steht für Geschmeidigkeit, frischen Wind, Pfiff; er verleiht dem Produkt Unwiderstehlichkeit.

Übung

Schweif

38

Vermessen Sie das Logo in Abbildung 32. (Erkennen Sie *diesen* Schweif?) Die Aufgabe ist, die Umrisslinie auf dem Taschenrechner nachzuahmen.

- a) Es liegt nahe, die Umrisslinie in zwei Segmente zu zerlegen, nämlich in den oberen und den unteren Teil. Versuchen Sie, die beiden Segmente durch Bézierkurven 3. Ordnung nachzuahmen, indem Sie für jedes Segment vier geeignete Kontrollpunkte wählen.



Abbildung 32
Swoosh

Kapitel 3

Analytischer Zugang: Die Parameterdarstellung

- b) Trotz der Schlichtheit haben Sie wahrscheinlich Schwierigkeiten gehabt, das Logo durch zwei Segmente nachzuahmen. Die Bézierkurven waren nicht dazu zu überlisten, die einfachsten Teile der Umrisslinie – nämlich die geraden Stücke – korrekt wiederzugeben. Wie immer Sie die Kontrollpunkte setzen, die geradlinigen Segmente erscheinen immer geschwungen. Das brauchen Sie aber nicht hinzunehmen. Zerlegen Sie die beiden Teile nochmals in zwei Segmente: in je einen gebogenen Teil, der als symmetrisch betrachtet werden kann, und in den geradlinigen Teil.

Zur Erinnerung: In Übung 11 haben Sie gelernt, wie man Kontrollpunkte zu symmetrischen Kurven findet, und in Übung 26, wie man Kontrollpunkte zu Strecken findet. Nun versuchen Sie es nochmals!

Das NIKE-Logo wurde 1971 von Caroline Davidson kreiert, als sie noch Studentin in Oregon war. Es stellt die Flügel der griechischen Göttin Nike dar. Nike wiederum war in der griechischen Sagenwelt die Göttin des Sieges, welche die mutigsten Krieger in den Anfängen der abendländischen Zivilisation auf den Schlachtfeldern begleitete und inspirierte. Heute verkörpert das NIKE-Logo auf den Sportbekleidungen den Geist dieser geflügelten Göttin und soll die besten Athleten der Welt zu neuen Höhen des Erfolges führen. Caroline Davidson erhielt damals von Phil Knight, dem Begründer der NIKE Firma, \$35 für das Logo. Zu jener Zeit vertrieb er seine Sportschuhe vom Kofferraum seines Autos aus.

Übung

39

Entwerfen Sie ein Logo für Ihren Freizeitklub, Ihre nächste Weihnachtskarte usw.

3.3 Ordnungswechsel

In der Praxis kommen Kurven vor, deren Teile man im ersten Durchgang durch Bézierkurven verschiedener Ordnungen darstellen kann. In Übung 43 etwa werden gewisse Teile des Buchstabens Q durch Bézierkurven 2. Ordnung dargestellt, andere durch solche der 3. Ordnung. Es wäre viel angenehmer, wenn man sich nicht immerzu entscheiden müsste und sich auf eine einzige Ordnung einschränken könnte. Ist das möglich?

Übung

40

- a) Am einfachsten wäre es, wenn sich alle Bézierkurven durch solche der 2. Ordnung ersetzen liessen. Warum geht das nicht?
 b) Sie zeigen schrittweise – in b), c) und d) –, dass umgekehrt jede Bézierkurve 2. Ordnung sich als Spezialfall einer Bézierkurve 3. Ordnung auffassen lässt:

Aus Übung 11 wissen Sie, dass bei einer symmetrischen Bézierkurve 3. Ordnung der Mittelpunkt $P(\frac{1}{2})$ der Kurve auf *drei Viertel* der Höhe des Kontrolltrapezes liegt.

Auf welcher Höhe des Kontrolldreiecks liegt der Kurvenmittelpunkt $P(\frac{1}{2})$ bei einer symmetrischen Bézierkurve 2. Ordnung?

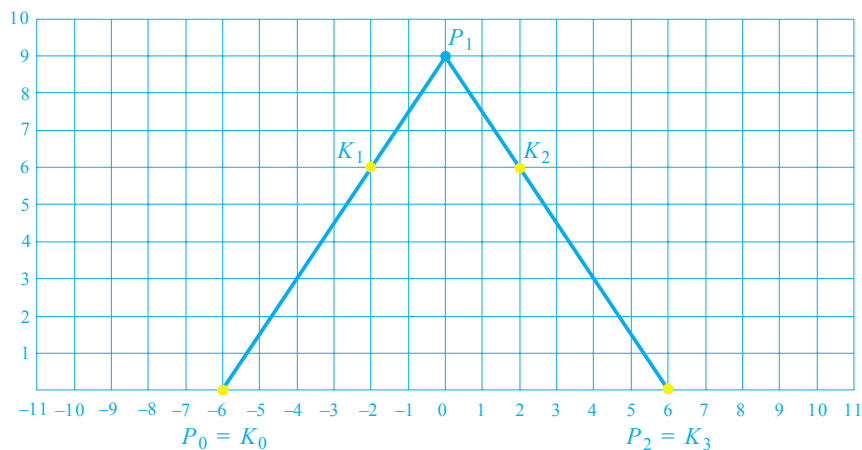


Abbildung 33
Graderhöhung von 2 auf 3

- c) Betrachten Sie die symmetrische Bézierkurve 2. Ordnung mit Kontrollpunkten $P_0(-6 | 0)$, $P_1(0 | 9)$, $P_2(6 | 0)$ und die Bézierkurve 3. Ordnung mit Kontrollpunkten $K_0 = P_0$, $K_1(-2 | 6)$, $K_2(2 | 6)$, $K_3 = P_2$. Zeigen Sie mit Hilfe der Überlegungen in b), dass die Mittelpunkte – und damit die Hochpunkte – der beiden Kurven übereinstimmen (siehe Abb. 33).
- d) Zeigen Sie rechnerisch, dass überhaupt alle Punkte der beiden Kurven zusammenfallen.

Die oben gegebene symmetrische Bézierkurve 2. Ordnung können Sie also ohne schlechtes Gewissen als eine Bézierkurve 3. Ordnung ansehen. In der nächsten Übung untersuchen Sie, ob diese *Graderhöhung* bei allen symmetrischen Bézierkurven 2. Ordnung möglich ist.

Übung

41

Graderhöhung bei symmetrischen Kurven 2. Ordnung

Eine symmetrische Bézierkurve 2. Ordnung sei durch die Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2 gegeben. Wie können Sie aufgrund der Erkenntnisse aus Übung 40b) die Kontrollpunkte K_0, K_1, K_2, K_3 so ermitteln, dass die zugehörige Bézierkurve 3. Ordnung mit der gegebenen Kurve übereinstimmt?

Übung

42

Graderhöhung bei allgemeinen Kurven 2. Ordnung

Eine allgemeine Bézierkurve 2. Ordnung sei durch die Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2 gegeben. Konstruieren Sie Kontrollpunkte K_0, K_1, K_2, K_3 so, dass die zugehörige Bézierkurve 3. Ordnung in jedem Punkt mit der gegebenen Bézierkurve 2. Ordnung übereinstimmt. Dazu bedienen Sie sich folgender Überlegung: Die beiden zu konstruierenden Kontrollpunkte K_1 und K_2 liegen wie in der vorhergehenden Übung auf den Schenkeln des Kontrolldreiecks. Daher gilt der Ansatz

$$\vec{r}_{K_1} = (1 - a) \cdot \vec{r}_{P_0} + a \cdot \vec{r}_{P_1}$$

$$\vec{r}_{K_2} = (1 - b) \cdot \vec{r}_{P_1} + b \cdot \vec{r}_{P_2}$$

Zeigen Sie, dass auch hier, wie im symmetrischen Fall, $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$ gilt.

43

Abbildung 34 zeigt die Konturen des Buchstabens Q in der Schriftart «New York», links normal und rechts geneigt (kursiv). In a) bis d) wird der normale Schriftschnitt betrachtet, in e) der geneigte. Dem Buchstaben ist ein Gitter unterlegt, sodass bei geeigneter Wahl der Koordinatenachsen die Hauptteile symmetrisch zu diesen liegen. Zerlegen Sie die Kontur in 6 Kurventeile k_1, k_2, \dots, k_6 .

- Stellen Sie die Kurventeile k_1, \dots, k_4 jeweils durch Bézierkurven der 3. Ordnung dar, indem Sie für jeden Kurventeil jeweils die vier Kontrollpunkte P_0, \dots, P_3 konstruieren, (vgl. Übung 11d).
- Stellen Sie die Kurventeile k_5, k_6 zunächst durch Bézierkurven der 2. Ordnung dar, indem Sie für jeden Kurventeil jeweils die drei Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2 konstruieren (vgl. Übung 10b). Verwandeln Sie sodann k_5, k_6 mit Hilfe der Übung 42 in Bézierkurven der 3. Ordnung.
- Führen Sie die Koordinaten der 24 Kontrollpunkte in einer Tabelle auf. Entscheiden Sie auf Grund dieser Tabelle, wie das Fenster im Taschenrechner zu wählen ist, damit die ganze Zeichnung Platz findet.
- Geben Sie diese Kontrollpunkte in Ihrem Taschenrechner ein und lassen Sie sich die Kurven k_1, \dots, k_6 zeichnen. Erhalten Sie den vorgegebenen Buchstaben Q?
- Die *geneigte* Form des Buchstabens:

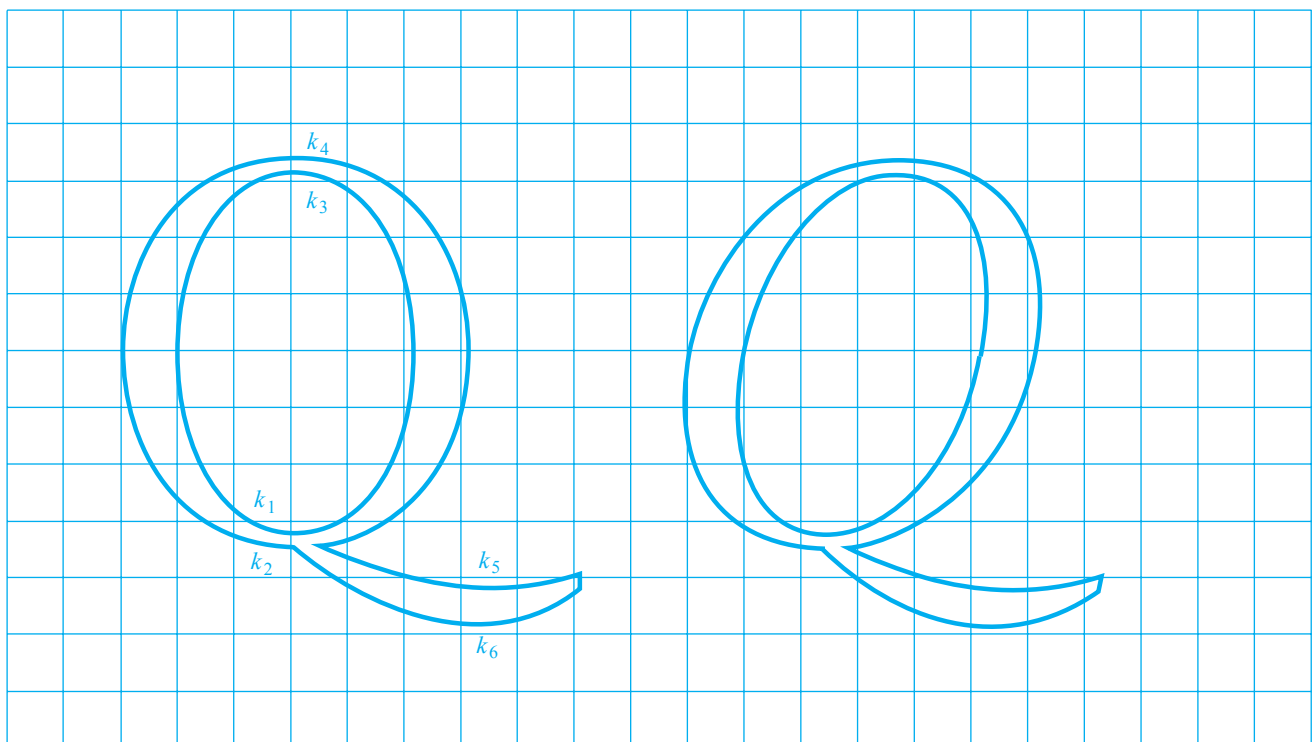


Abbildung 34
Buchstabe Q, normal und geneigt

Sie können die Umrisslinie eines Buchstabens manipulieren, indem Sie die Kontrollpunkte systematisch versetzen. Verändern Sie das Taschenrechnerprogramm aus Übung 22 derart, dass der Taschenrechner aus den Kontrollpunkten des normalen Buchstabens direkt den geneigten Buchstaben berechnet und zeichnet. (Wenn nötig, finden Sie im Anschluss an diese Aufgabe zusätzliche Informationen.)

- f) Entwerfen Sie die Konturen Ihrer Initialen.

Zur geneigten Schrift am Beispiel des Buchstabens I

1. Sie können das Rechteck $ABCD$ als Schaft des Buchstabens I (ohne die Serifen, d. h. ohne die Füßchen) auffassen. Bei der Neigung wird die Höhe des Buchstabens nicht verändert. Diese Abbildung, die den normalen in den geneigten Buchstaben verwandelt, heisst **Scherung**. Sie kennen die Scherung aus dem Geometrieunterricht: Bei der Verwandlung eines Rechtecks in ein flächengleiches Parallelogramm bleiben Grundlinie und Höhe erhalten. Die Ecken C und D haben sich dabei längs der Höhenparallelen nach C' bzw. D' verlagert. Wesentlich ist dabei, dass die vertikal in C und D befestigten Schenkel sich jeweils um die gleichen Winkel w bewegt haben. Betrachten Sie den Eckpunkt D mit den Koordinaten $(x \mid y)$. Die Koordinaten $(x' \mid y')$ des neuen Punktes D' lassen sich so berechnen:
Gemäss Abbildung 35 ist die Neigung gegenüber der Vertikalen

$$m = \tan w = \frac{x' - x}{y'}$$

Bei der Scherung bleibt die Höhe unverändert:

$$y = y'$$

Löst man die letzten beiden Gleichungen nach den neuen Koordinaten x' und y' auf, so lässt sich das Resultat in zwei Gleichungen zusammenfassen, welche **Koordinatentransformation** für die Scherung genannt werden:

$$\begin{aligned} x' &= x + my \\ y' &= y \end{aligned}$$

Für $m = 0$ liegt keine Neigung vor und der Buchstabe erscheint dann normal.

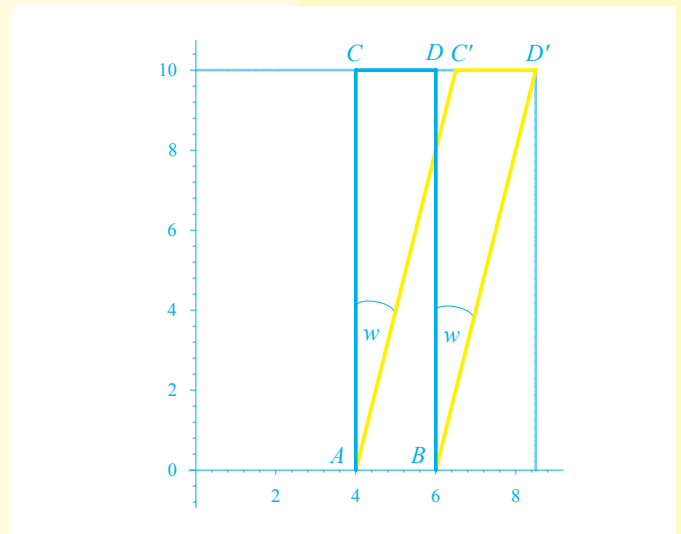


Abbildung 35
Buchstabe I, normal und geneigt

2. Sie sehen ebenfalls, welche «Einsparungsmöglichkeiten» durch Bézierkurven möglich sind. Statt ein Heer von Punkten für die Buchstaben des Alphabets in ihren verschiedensten Schriftarten (Boldoni, Helvetica usw.), Schriftschnitten (kursiv, fett usw.) und Grössen (12 pt, 18 pt usw.) im Speicher des Computers zu halten, reicht es, die Kontrollpunkte und die Art der Manipulationen, d. h. der Koordinatentransformationen, zu speichern. Eine ganze kalligrafische Galerie lässt sich so aufbauen und auf Schriften anderer Kulturen erweitern, mitsamt ihren Entwicklungen über die Jahrtausende hinweg.

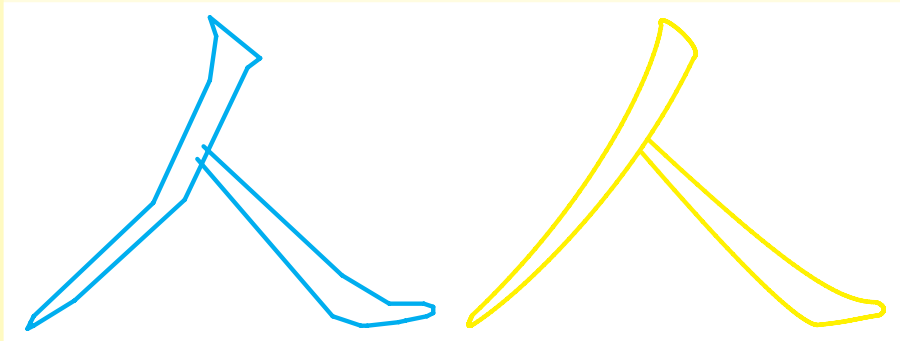


Abbildung 36
Das chinesische Zeichen «Ren» für «Mensch»: links das Gerüst, d. h. die Kontrollpolygone, rechts das durch Bézierkurven erzeugte Zeichen selbst

Rückblick und Ausblick

- Jede Bézierkurve 2. Ordnung lässt sich auch als Bézierkurve 3. Ordnung auffassen. Die zusätzlichen Kontrollpunkte erhält man so: K_1 liegt auf zwei Drittel des Weges von P_0 nach P_1 , während K_2 auf einem Drittel des Weges von P_1 nach P_2 liegt (siehe Abb. 37).

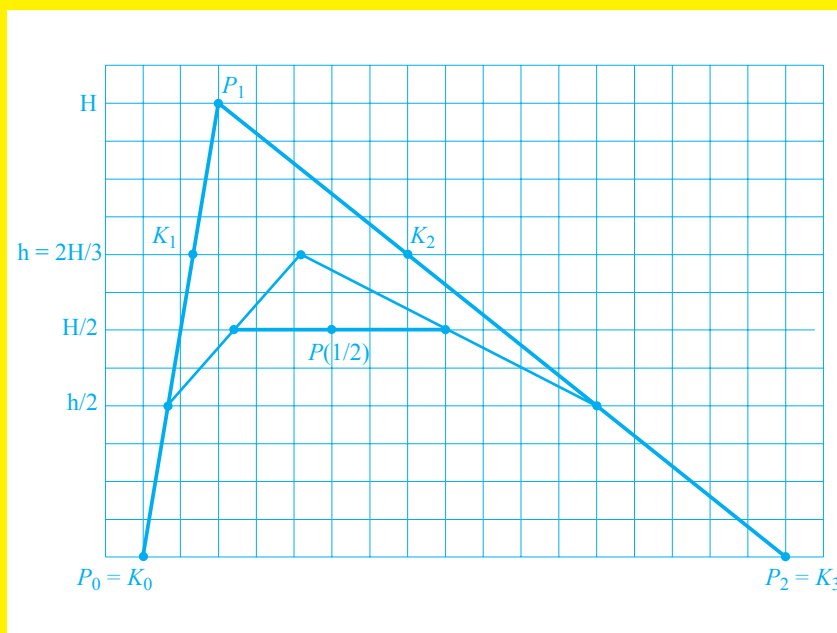


Abbildung 37
Verwandlung einer Bézierkurve 2. Grades in eine Bézierkurve 3. Grades

- Diese so genannte **Graderhöhung** gilt auch für Bézierkurven höherer Ordnung. Jede Bézierkurve n -ter Ordnung ist auch eine Bézierkurve $(n + 1)$ -ter Ordnung. Die neuen Kontrollpunkte werden erzeugt, indem man

K_1 auf $\frac{n}{n+1}$ des Weges von P_0 nach P_1 ,

K_2 auf $\frac{n-1}{n+1}$ des Weges von P_1 nach P_2 ,

K_3 auf $\frac{n-2}{n+1}$ des Weges von P_2 nach P_3 ,

⋮

K_n auf $\frac{1}{n+1}$ des Weges von P_{n-1} nach P_n

setzt (siehe Abb. 38).

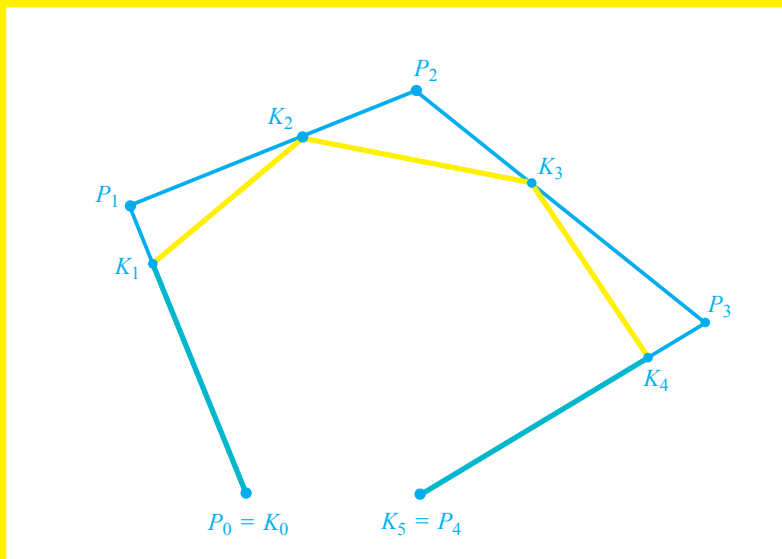


Abbildung 38
Graderhöhung von n auf $n + 1$

- Im Hinblick auf das Zusammensetzen einzelner Béziersegmente ist es manchmal wichtig, dass ein Béziersegment über genügend Kontrollpunkte verfügt (siehe Rückblick in Abschnitt 3.4). Hier haben wir eine Möglichkeit, ein bestehendes Béziersegment in eines höherer Ordnung überzuführen, ohne dabei seine geometrische Form zu verändern.

3.4 Die Ableitung von Bézierkurven

In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, dass Sie den Ableitungsbegriff vom Analysisunterricht her kennen.

In Übung 9 haben Sie sich das erste Mal mit Tangenten befasst und bemerkt, dass Tangenten in den Anfangs- und Endpunkten genau entlang der ersten bzw. letzten Polygonseite des Kontrollpolygons verlaufen. Diese Tatsache haben Sie wiederholt gebraucht (z. B. in Übung 38 zum Nike-Logo oder in Übung 43 zum Buchstaben Q), um das Kontrollpolygon zu einer Kurve zu finden.

In Übung 18 sind Ihnen Tangenten als letzte Konstruktionslinien R_2R_3 in der Methode von de Casteljau begegnet. Der Rechner legte Strecke um Strecke um die Bézierkurve, so als ob es sich um einen Film mit Momentaufnahmen einer fliegenden Jongleurkeule handelte. Die Vermutung, dass diese Strecken, welche die Kurve umhüllten, Tangenten an die Kurve waren, lag nahe. Dies soll nun auf analytischem Wege gezeigt werden.

Die Parameterdarstellung der Bézierkurve der n -ten Ordnung ist

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \cdot \vec{r}_i \\ &= (1-t)^n \cdot \vec{r}_0 + n \cdot t \cdot (1-t)^{n-1} \cdot \vec{r}_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot t^2 \cdot (1-t)^{n-2} \cdot \vec{r}_2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n(n-1)}{2} \cdot t^{n-2} \cdot (1-t)^2 \cdot \vec{r}_{n-2} + n \cdot t^{n-1} \cdot (1-t) \cdot \vec{r}_{n-1} + t^n \cdot \vec{r}_n\end{aligned}$$

Dabei ist $t \in [0, 1]$ der Parameter, $\vec{r}(t)$ der Ortsvektor zum Punkt $P(t)$ der Kurve. $\vec{r}(t)$ kann als gewichtetes Mittel der Ortsvektoren zu den Kontrollpunkten gedeutet werden, wobei die Gewichte die Bernsteinpolynome sind.

Die Berechnung der Tangente an einem Kurvenpunkt

Wie im Analysisunterricht betrachten Sie die Tangente in einem Kurvenpunkt als Grenzgerade von Sekanten, deren zweiter Kurvenpunkt dem ersten immer näher kommt.

Es sei $\vec{r}(t_0)$ der Ortsvektor des gegebenen Punktes P_0 auf der Kurve C , $\vec{r}(t)$ der Ortsvektor eines weiteren Punktes $P \in C$. Betrachten Sie zunächst die Sekanten durch P_0 und P .

Die Sekante hat den Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$.

Wenn $t > t_0$, dann hat $\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ die gleiche Orientierung wie $\overrightarrow{P_0P}$.

Wenn $t < t_0$, dann hat $\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ die entgegengesetzte Orientierung wie $\overrightarrow{P_0P}$.

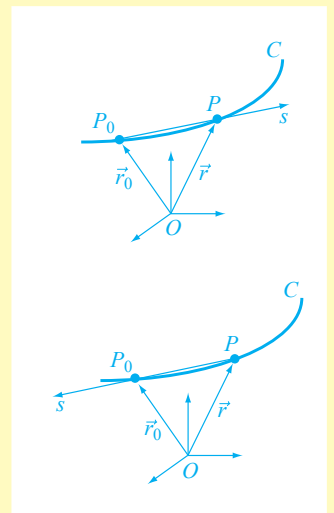


Abbildung 39
Tangente an eine räumliche Kurve

Rückt der Punkt P immer näher an P_0 , so gehen die zugehörigen Sekanten in die Tangente in P_0 über. Der Grenzwert

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$$

heißt **Ableitung der vektoriellen Funktion** $\vec{r}(t)$ an der Stelle $t = t_0$. Der Vektor $\vec{r}'(t_0)$ ist parallel zur Tangente in P_0 an C und hat jene Orientierung, in der die Kurve C durchlaufen wird, wenn t wächst.

Bemerkung: Häufig wird für die Ableitung nach Newtons Schreibweise ein Punkt anstelle eines Striches geschrieben, insbesondere dann, wenn mit t die Zeit gemeint ist: $\dot{\vec{r}}$ statt \vec{r}' .

Übung

Ableitungsregeln

44

In der obigen Definition der Ableitung kommen nur Subtraktion von Vektoren, Division durch einen Skalar und der Grenzübergang vor, genau wie bei nichtvektoriellen Funktionen. Zeigen Sie, dass sich daher folgende Ableitungsregeln auch auf vektorielle Funktionen übertragen lassen.

Summe von Vektoren:	Für	$\vec{r}(t) = \vec{u}(t) + \vec{v}(t)$	ist	$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{u}}(t) + \dot{\vec{v}}(t)$.
Konstanter Skalar:	Für	$\vec{r}(t) = c \cdot \vec{u}(t)$	ist	$\dot{\vec{r}}(t) = c \cdot \dot{\vec{u}}(t)$.
Konstanter Vektor:	Für	$\vec{r}(t) = c(t) \cdot \vec{u}$	ist	$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{c}(t) \cdot \vec{u}$.

Übung

Tangente in den Endpunkten

45

a) Zeigen Sie unter Anwendung der obigen Ableitungsregeln, dass die Ableitungsformel der Bézierkurve 3. Ordnung folgendermassen lautet:

$$\dot{\vec{r}}(t) = -3(1-t)^2 \cdot \vec{r}_0 + (3-12t+9t^2) \cdot \vec{r}_1 + (6t-9t^2) \cdot \vec{r}_2 + 3t^2 \cdot \vec{r}_3 \quad (3)$$

b) Zeigen Sie, dass die Tangenten in den Endpunkten einer Bézierkurve 3. Ordnung folgende Richtungen haben:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(0) &= 3\overrightarrow{P_0P_1} \\ \dot{\vec{r}}(1) &= 3\overrightarrow{P_2P_3} \end{aligned} \quad (4)$$

c) Was bedeuten die Formeln in (4) geometrisch?

Übung

Tangente in der Kurvenmitte

46

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung – und damit die Tangentenrichtung – im «Kurvenmittelpunkt» $P(\frac{1}{2})$ einer Bézierkurve 3. Ordnung durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\dot{\vec{r}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}(\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_0P_3}) \quad (5)$$

b) Konstruieren Sie zunächst für ein gleichschenkliges Kontrolltrapez den «Kurvenmittelpunkt» $P(\frac{1}{2})$ nach der Methode von de Casteljau. Wie deuten Sie die Formel in a)? Zeichnen Sie diese Tangente ein.

c) Lösen Sie dieselbe Aufgabe wie in b) für ein allgemeines Kontrollviereck.

d) Es seien die vier Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3 gegeben. Konstruieren Sie $P(\frac{1}{2})$ und die drei Tangenten in $P(0), P(\frac{1}{2}), P(1)$. Skizzieren Sie daraus den Verlauf der Kurve.

47

Beweisen Sie, dass in der Konstruktion von de Casteljau jeweils die letzten Verbindungsstrecken R_2R_3 Tangenten an die Bézierkurve in den Punkten S_3 sind (siehe Abb. 40).

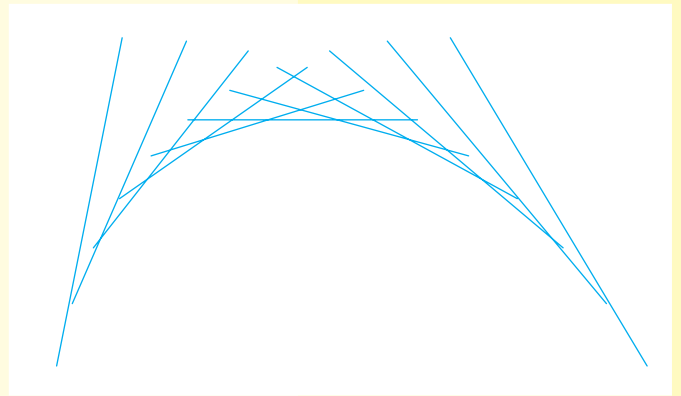


Abbildung 40
Jongleurkeule

48

Betrachten Sie eine Bézierkurve n -ter Ordnung.

(i) $n = 2$ (ii) n allgemein

- Berechnen Sie die Ableitungen in den Endpunkten P_0 und P_n .
- Zeigen Sie, dass dort die Tangenten stets entlang der zugehörigen Polygonseiten verlaufen.

49

- In Übung 3b haben Sie durch geometrische Überlegungen gezeigt, dass der höchste Punkt einer Bézierkurve 2. Ordnung bezüglich der Basis P_0P_2 der «Kurvenmittelpunkt» $P(\frac{1}{2})$ ist. Beweisen Sie dies nun durch Rechnung.
- Eine Bézierkurve 3. Ordnung habe ein trapezförmiges Kontrollpolygon. Beweisen Sie, dass der höchste Punkt bezüglich der Basis P_0P_3 der «Kurvenmittelpunkt» $P(\frac{1}{2})$ ist.

50

In Übung 27 haben Sie durch Probieren gefunden, dass Kontrollpunkte in den Ecken eines «Feldsessels» dann zu einer verschlungenen Kurve führen, wenn die Decklinie $\overline{P_1P_2}$ länger als die Grundlinie $\overline{P_0P_3}$ ist. Das sollen Sie hier rechnerisch beweisen.

- Betrachten Sie allgemeine symmetrische Kontrollpolygone $P_0(-1 | 0)$, $P_1(a | b)$, $P_2(-a | b)$, $P_3(1 | 0)$, wobei a und b positiv seien. Für welche a und b überschneiden sich die zugehörigen Bézierkurven?

Anleitung: Wegen der Symmetrie der Kontrollpolygone muss ein Überschneidungspunkt auf der Symmetrieachse, also auf der y -Achse liegen. Dabei ist eine kubische Gleichung, nämlich $x(t) = 0$, zu lösen. Da der Kurvenmittelpunkt $P(\frac{1}{2})$ auch auf der y -Achse liegt, muss eine der Lösungen der kubischen Gleichung $t_1 = \frac{1}{2}$ lauten. Die anderen Lösungen sind nach geeigneter Polynomdivision zu finden.

- b) Welche Koordinaten haben die Überschneidungspunkte der verschlungenen Kurven in a)?
- c) Stellen Sie eine Regel auf, wonach symmetrische Bézierkurven verschlungen sind.

Übung

Knickfreier Übergang (Stetigkeit 1. Grades)

51

Gewisse Kurven können nicht durch ein einziges Béziersegment dargestellt werden, wie z. B. der Schweif des Nike-Logos. Damit der gekrümmte Teil ohne Knick in das gerade Stück übertritt, müssen die Tangenten im Übergangspunkt identisch sein. Welche Bedingungen müssen die Kontrollpunkte von zwei Segmenten erfüllen, damit dies gewährleistet ist?

Übung

Zweite Ableitung

52

- a) Berechnen Sie die zweite Ableitung der Bézierkurve n -ter Ordnung, zunächst für $n = 3$, dann für allgemeines n .
- b) Zeigen Sie, dass in den Endpunkten Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}(0) &= n(n-1) \cdot (\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2}) \\ \ddot{\vec{r}}(1) &= n(n-1) \cdot (\overrightarrow{P_{n-1}P_{n-2}} + \overrightarrow{P_{n-1}P_n})\end{aligned}\quad (6)$$

Welche geometrische Bedeutung haben diese Formeln?

Übung

Zweite Ableitung bei Bézierkurven 2. Ordnung

53

- a) Berechnen Sie die zweite Ableitung in den Endpunkten einer Bézierkurve 2. Ordnung.
- b) Sie haben eben, richtige Rechnung vorausgesetzt, für $\ddot{\vec{r}}(0)$ und $\ddot{\vec{r}}(1)$ dasselbe Resultat erhalten. Prüfen Sie, ob $\ddot{\vec{r}}(t)$ entlang der ganzen Bézierkurve 2. Ordnung konstant ist, d. h. für alle t denselben Vektor ergibt.
- c) Aus dem Analysisunterricht kennen Sie die Ableitungen verschiedener einfacher Funktionsklassen. Welche Funktionen haben ebenfalls konstante zweite Ableitungen?
- d) Die Bézierkurven 2. Ordnung sind Parabeln¹. Begründen Sie.

Übung

Ruckfreier Übergang (Stetigkeit 2. Grades)

54

Manchmal ist es wichtig, dass bei Übergängen von einem Segment zum andern die zweiten Ableitungen übereinstimmen, z. B. dann, wenn Eisenbahnschienen zu verlegen sind. Der Übergang soll sanft geschehen. Es soll beim Übergangspunkt keinen Beschleunigungssprung, keinen ruckartigen Übergang geben, der den Zug aus dem Gleis wirft.

¹ Eine im technischen Zeichnen übliche Methode, um zwei Punkte P_0 und P_2 durch ein Parabelstück zu verbinden, ist die für die Erstellung des Drahtspannbildes (vgl. Abb. 8) verwendete.

- a) Zeigen Sie, dass für zwei Béziersegmente 3. Ordnung der Form

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 B_i(t)P_i \text{ mit Kontrollpunkten } P_0, \dots, P_3$$

$$K(t) = \sum_{i=0}^3 B_i(t)K_i \text{ mit Kontrollpunkten } K_0, \dots, K_3$$

beim ruckfreien Übergang folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

- (i) $P(1) = K(0)$ d. h. $P_3 = K_0$
(ii) $P'(1) = K'(0)$ d. h. $\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{K_0K_1}$
(iii) $P''(1) = K''(0)$ d. h. $\overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{K_1K_0} + \overrightarrow{K_1K_2}$

- b) Es sei eines der Béziersegmente durch die Kontrollpunkte P_0, \dots, P_3 gegeben. Wie lassen sich daraus die Kontrollpunkte K_0, \dots, K_3 des zweiten Béziersegmentes konstruieren, damit der Übergang ruckfrei geschieht?

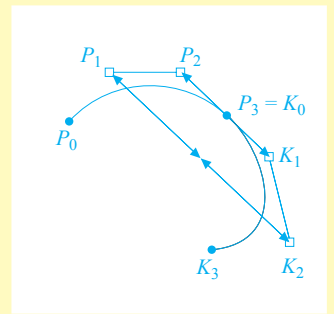


Abbildung 41
Kontrollpunkte bei ruckfreiem Übergang

Anleitung: Zeigen Sie, dass folgende Konstruktionsregeln gelten:

- $P_3 = K_0$ liegt in der Mitte der Strecke $\overline{P_2K_1}$.
- $\overrightarrow{P_1K_2}$ ist parallel zu $\overrightarrow{P_2K_1}$ und doppelt so lang.

Übung

Wie Bézierkurven Sherlock Holmes gedient hätten

(Nach Stan Wagon: 'Mathematica in Action')

55

«This track, as you perceive, was made by a rider who was going from the direction of the school.»

«Or towards it?»

«No, no, my dear Watson. The more deeply sunk impression is, of course, the hind wheel, upon which the weight rests. You perceive several places where it has passed across and obliterated the more shallow mark of the front one. It was undoubtedly heading away from the school.»

Aus «The Adventure of the Priory School» von Arthur Conan Doyle.

- a) Der oben wiedergegebene Dialog fand zwischen Sherlock Holmes und seinem treuen Begleiter und Berichterstatter, Dr. Watson, statt. Diskutieren Sie Sherlock Holmes' Argumentation. Hat er Recht? Begründen Sie.
- b) Abbildung 42 gibt die Spuren des Vorder- und des Hinterrades eines Velos bei der Fahrt durch schlammiges Gelände wieder. Fuhr das Velo von links nach rechts oder umgekehrt?

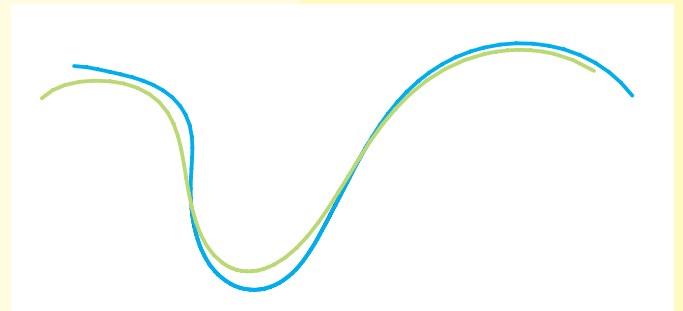


Abbildung 42
Velospur: nach links oder nach rechts fahrend?

Um diese Frage zu beantworten, sind folgende drei vereinfachende Annahmen zu machen:

- (I) Das Velo wird als Strecke der Länge v betrachtet. Endpunkte der Strecke sind die Berührungspunkte der Räder mit dem Boden.
- (II) Während der Fahrt ist das Velo, also die Strecke v , stets tangential zur Bewegung des Hinterrades ausgerichtet.
- (III) Rückt man von der momentanen Position des Hinterrades in Richtung der Tangente um v Einheiten vor, so erhält man die Position des Vorderrades.

Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass die durch die 15 Kontrollpunkte

$$\begin{array}{ccccc} P_0(3 | 62) & P_1(10 | 69) & P_2(23 | 67) & P_3(46 | 67) & P_4(46 | 54) \\ P_5(18 | 36) & P_6(29 | 16) & P_7(43 | 10) & P_8(61 | 7) & P_9(73 | 27) \\ P_{10}(65 | 51) & P_{11}(69 | 61) & P_{12}(89 | 78) & P_{13}(110 | 77) & P_{14}(124 | 68) \end{array}$$

erzeugte Bézierkurve die Spur des Hinterrades erzeugt, indem Sie *Maple* oder ein ähnliches Programmsystem die Kurve zeichnen lassen.

Nun lassen Sie sich vom Computer die Spur des Vorderrades nach (III) berechnen und zeichnen. Fährt das Velo nach links oder nach rechts?

Rückblick

Beim Zusammensetzen einzelner Béziersegmente wünscht man sich oft verschiedene Grade von kontinuierlichen Übergängen.

Für zwei Béziersegmente

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t)P_i \quad \text{mit Kontrollpunkten } P_0, \dots, P_n$$

$$K(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t)K_i \quad \text{mit Kontrollpunkten } K_0, \dots, K_n$$

müssen bei kontinuierlichen Übergängen folgende Bedingungen erfüllt sein:

Beim sprunghaften Übergang $P_n = K_0$.

Beim knickfreien Übergang $P_n = K_0$ und $\overrightarrow{P_n P_{n-1}} = \overrightarrow{K_0 K_1}$.

Beim ruckfreien Übergang $P_n = K_0$ und $\overrightarrow{P_n P_{n-1}} = \overrightarrow{K_0 K_1}$
und $\overrightarrow{P_{n-1} P_{n-2}} + \overrightarrow{P_{n-1} P_n} = \overrightarrow{K_1 K_0} + \overrightarrow{K_1 K_2}$.

Sie sehen also, dass beim Übergang mit Stetigkeit 0. Grades je *ein* Kontrollpunkt, mit Stetigkeit 1. Grades je *zwei* Kontrollpunkte, mit Stetigkeit 2. Grades je *drei* Kontrollpunkte der einzelnen Béziersegmente an gewisse Bedingungen gebunden sind. Das setzt voraus, dass bei Stetigkeit höheren Grades genügend Kontrollpunkte vorhanden sind. Dies aber ist immer erfüllbar, weil ein schon bestehendes Béziersegment stets durch Graderhöhung (siehe Abschnitt 3.3, Rückblick, dritter Punkt) in eines mit noch mehr Kontrollpunkten verwandelt werden kann, ohne dass seine geometrische Form verändert wird.

3.5 Kurvenanpassung

Die anschaulichste Art, durch gewisse Punkte eine elegante Kurve zu legen, ist wohl die im Schiffbau von alters her gebräuchliche. Um ein paar Pflöcke, welche die Position der gegebenen Punkte markieren, wird eine elastische Holzlatte, die so genannte Straklatte, gelegt. Diese Latte nimmt auf Grund ihrer Biegsamkeit von selbst eine geschmeidige Form ein. Da dieses Kurvenlegen auf dem Boden eines Dachstockes vorgenommen wurde, heisst das Planen eines Bootes im Englischen auch heute noch «lofting». Das ostenglische Wort für die Straklatte ist «spline», womit heute in der Mathematik die glatten Kurven gemeint sind, die durch vorgegebene Punkte gelegt werden.

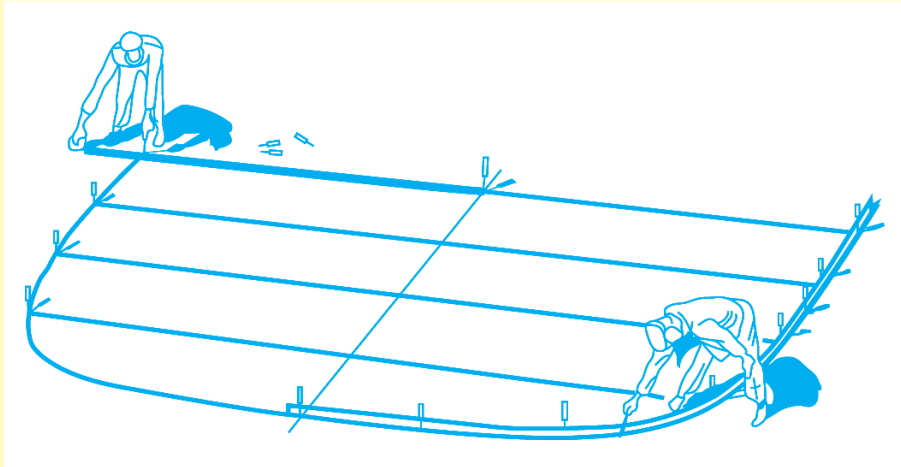


Abbildung 43
Kurvenlegen mittels Splines
(= Straklatten)

Mit den Splines verbindet sich eine umfangreiche Theorie der Kurven- und Flächenfindung, die in vielfältigen Bereichen des täglichen Lebens Anwendung findet: von der Modellierung eines Flugzeugumpfes über die Strassenführung im Gelände bis zur Modellierung eines Antlitzes in der plastischen Chirurgie oder in der computeranimierten Filmindustrie.

Gewöhnlich nimmt man im Mathematikunterricht Polynomfunktionen, wenn man eine Kurve durch Punkte legen will. Diese liefern auf direkte Weise eine **Interpolationskurve**. Sie haben jedoch Nachteile, die in den Übungen 56 und 57 untersucht werden sollen.

Interpolation

Gegeben seien die vier Punkte $A(-7.1 | 11.0)$, $B(-6.7 | 7.8)$, $C(3.3 | 6.2)$, $D(5.0 | 7.1)$.

- Zeichnen Sie die vier Punkte in ein Koordinatensystem und raten Sie, wie eine Kurve durch diese vier Punkte aussehen könnte.
- Bestimmen Sie die einfachste Polynomfunktion, deren Graph durch diese vier Punkte geht. Lassen Sie sich von Ihrem Grafiktaschenrechner die so bestimmte Kurve zeichnen. Was fällt auf?
- Lassen Sie sich auf Ihrem Grafiktaschenrechner die Bézierkurve mit den Kontrollpunkten A , B , C , D zeichnen. Was fällt auf?

Interpolation und Koordinatensystem

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck $P_0P_1P_2$ der Seitenlänge 2. Wählen Sie das Koordinatensystem auf zwei Arten:

- Die y -Achse sei parallel zu einer der Symmetrieachsen des gleichseitigen Dreiecks, z. B. so, dass die Ecken die Koordinaten

$$P_0(-1 | 0), \quad P_1(0 | -\sqrt{3}), \quad P_2(1 | 0)$$

haben.

- Die Winkelhalbierende der Koordinatenachsen sei parallel zu einer der Symmetrieachsen des gleichseitigen Dreiecks, z. B. so, dass die Ecken die Koordinaten

$$P_0(0 | \sqrt{2}), \quad P_1(\sqrt{2} | 0), \quad P_2\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \mid \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right)$$

haben.

Zeichnen Sie die jeweiligen Ausgangssituationen auf. Berechnen Sie für jeden Fall die einfachste Polynomfunktion, deren Graph durch die drei vorgegebenen Punkte $P_0P_1P_2$ geht. Was beobachten Sie?

Rückblick

- Es überrascht, dass die in Übung 56 erhaltene Polynomfunktion nicht «brav» durch die vorgeschriebenen Punkte geht, sondern zwischendurch unkontrolliert umhertanzt. Dieses kleine Beispiel zeigt, welche Widrigkeiten etwa den Ingenieuren Bézier und de Casteljau begegnet sind und was sie zur Entwicklung ihrer Methoden veranlasste. Sie wissen aus Übung 25, dass eine Bézierkurve stets innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte verläuft und sich daher voraussehbar benimmt.
- Je nach Wahl des Koordinatensystems erhielten Sie in Übung 57 verschiedene, nichtkongruente Parabeln, im ersten Fall eine mit der Öffnung $\sqrt{3}$, im zweiten Fall eine mit der Öffnung $\sqrt{6}$. Im Gegensatz dazu hängt die Erzeugung der Bézierkurve nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab. Das kann auf verschiedene Arten eingesehen werden:

Geometrische Begründung: Die Konstruktion durch fortgesetztes Teilen und Verbinden nach der Methode von de Casteljau ergibt unabhängig davon, wie das Koordinatensystem gewählt wird, immer dieselbe Bézierkurve.

Algebraische Begründung: Es sei O der Ursprung des alten Koordinatensystems und O^* derjenige des neuen Koordinatensystems. Die zum Kontrollpolygon $P_0 \dots P_n$ gehörende Bézierkurve erfüllt im alten Koordinatensystem die Gleichung $\overrightarrow{OP}(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) \overrightarrow{OP}_i$.

Zu zeigen ist, dass im neuen Koordinatensystem

$$\overrightarrow{O^*P}(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) \overrightarrow{O^*P}_i \text{ gilt:}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } 0 \leq t \leq 1 \text{ ist } \sum_{i=0}^n B_i(t) \overrightarrow{O^*P}_i &= \sum_{i=0}^n B_i(t) [\overrightarrow{O^*O} + \overrightarrow{OP}_i] \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^n B_i(t)}_1 \overrightarrow{O^*O} + \underbrace{\sum_{i=0}^n B_i(t) \overrightarrow{OP}_i}_{\overrightarrow{OP}(t)} \\ &= \overrightarrow{O^*P}(t) \end{aligned}$$

Dies ist eine Folge davon, dass Bernsteinpolynome die Eins zerlegen (siehe Übung 37b).

- Bézierkurven haben aber den Nachteil, dass sie die Kontrollpunkte nur **approximieren** und nicht wie die Splines **interpolieren**.
- In diesem Heft ist nur eine bescheidene Zahl von Eigenschaften der Bézierkurven behandelt worden. Es gäbe noch viel mehr zu ergründen. Für erste Anwendungen soll dies jedoch genügen.

Bisher wurden Buchstaben, Logos und Grafiken betrachtet, die sich durch Kurven auf einem Blatt Papier darstellen lassen. Wir Menschen leben aber in einer Welt, in der sich räumliche Gegenstände, nützliche Dinge, die mit Händen zu greifen sind, herstellen lassen. Sind wir in der Lage, die Oberfläche eines Werkzeuges, eines Parfümfläschchens, die Form eines Bootes, eines geschwungenen Daches darzustellen, so wirkt das auf uns ungleich «plastischer».

So wie eine Kurve eine ebene Figur umschließt, so begrenzt eine Fläche einen räumlichen Gegenstand. Das Studium der Bézierkurven ist daher auch als Vorstufe zum Studium der Bézierflächen zu verstehen.

Flächen lassen sich aus räumlichen Kurven erzeugen. Stellen Sie sich vor, dass Sie Ihre Hand über eine Fläche, etwa die Karosserie eines Autos, streichen lassen. Ihr Mittelfinger bildet näherungsweise eine Kurve, die sich stetig verändernd durch den Raum bewegt und dabei eine Fläche überstreicht.

Parameterdarstellung von Flächen

- a) Die einfachste Fläche ist eine Ebene: Abbildung 44 zeigt den Ausschnitt aus einer Ebene. Stellen Sie sich das Stück eines gespannten Tuches vor, das durch die Querfäden g_0, g_1 und die Längsfäden h_0, h_1 begrenzt wird. Betrachten Sie den Querfaden g_0 . Seine Punkte haben die Ortsvektoren

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{P_{00}} + t \cdot \vec{a}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Nun lassen Sie jeden Punkt des Querfadens g_0 parallel zum Längsfaden h_0 nach hinten zu g_1 wandern. Dabei verschiebt sich jeder Ortsvektor $\vec{r}(t)$ um ein gewisses Vielfaches von \vec{b} :

$$\vec{r}(t, s) = \underbrace{\vec{r}(t)}_{\vec{r}_{P_{00}} + t \cdot \vec{a}} + s \cdot \vec{b} = \vec{r}_{P_{00}} + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

Das ist die aus der Vektorgeometrie bekannte **Parameterdarstellung der Ebene**.

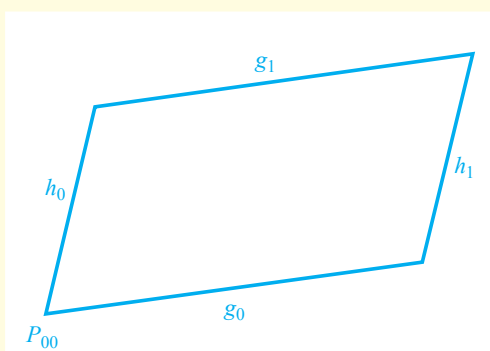


Abbildung 44
Ebene, berandet durch die Geraden g_0, g_1 und h_0, h_1

b) Betrachten Sie nun die gekrümmte Fläche: Auf diesem gewölbten Tuch sind die Quer- und Längsfäden nicht mehr Geraden, sondern gekrümmte Kurven, die ihre Laufrichtung von Punkt zu Punkt ständig ändern. Betrachten Sie wieder die vorderste Kurve g_0 . Sie wissen inzwischen, wie g_0 durch eine Bézierkurve dargestellt werden kann. Angenommen, Sie haben die Kontrollpunkte $P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{03}$ durch Konstruktion gefunden, dann lautet die Gleichung für g_0

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i(t) \vec{r}_{0i} \quad (7)$$

Nun lassen Sie die Kontrollpunkte $P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{03}$ von g_0 entlang Bézierkurven nach hinten zu g_1 wandern:

$$P_{00} \text{ wandert entlang } h_0: \vec{r}_{00}(s) = \sum_{j=0}^3 B_j(s) \vec{r}_{j0} \quad \text{mit Kontrollpunkten } P_{00}, P_{10}, P_{20}, P_{30}$$

$$P_{01} \text{ wandert entlang } \vec{r}_{01}(s) = \sum_{j=0}^3 B_j(s) \vec{r}_{j1} \quad \text{mit Kontrollpunkten } P_{01}, P_{11}, P_{21}, P_{31}$$

$$P_{02} \text{ wandert entlang } \vec{r}_{02}(s) = \sum_{j=0}^3 B_j(s) \vec{r}_{j2} \quad \text{mit Kontrollpunkten } P_{02}, P_{12}, P_{22}, P_{32}$$

$$P_{03} \text{ wandert entlang } h_1: \vec{r}_{03}(s) = \sum_{j=0}^3 B_j(s) \vec{r}_{j3} \quad \text{mit Kontrollpunkten } P_{03}, P_{13}, P_{23}, P_{33}$$

Fassen wir die obigen vier Gleichungen zusammen, dann wandert P_{0i} entlang

$$\vec{r}_{0i}(s) = \sum_{j=0}^3 B_j(s) \vec{r}_{ji} \quad i = 0, 1, 2 \text{ oder } 3 \quad (8)$$

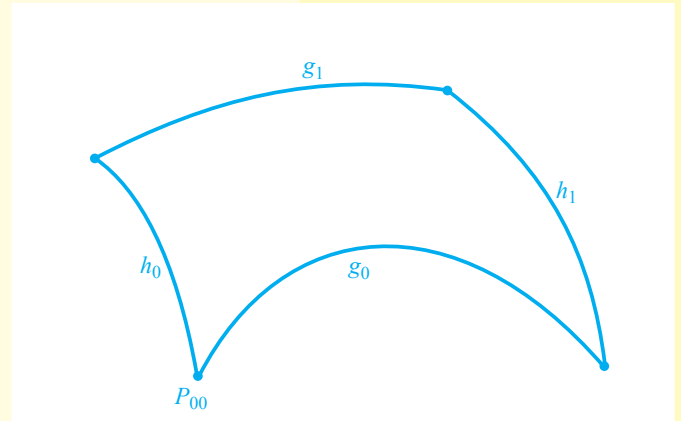


Abbildung 45
Gekrümmte Fläche, berandet durch die Kurven g_0, g_1 und h_0, h_1

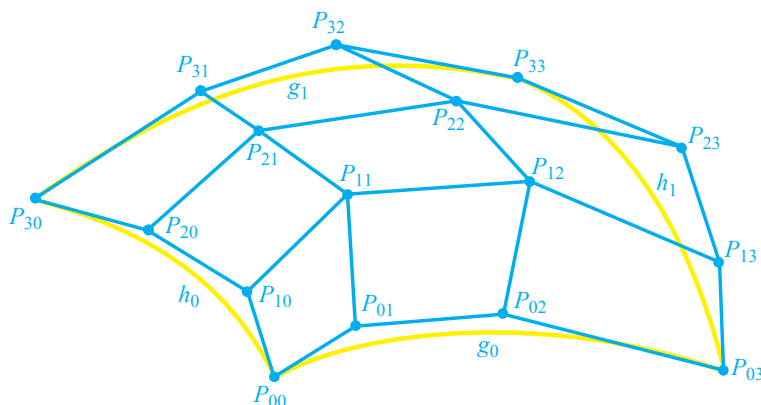


Abbildung 46
Netz von Kontrollpunkten für eine Bézierfläche

Wenn s von 0 nach 1 anwächst, wandert der von $P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{03}$ erzeugte vordere Querfaden g_0 zum hinteren Querfaden g_1 . Entlang dieses Weges werden in der Parameterdarstellung (7) von $g_0 : \vec{r}(t) = \sum_{i=0}^3 B_i(t) \vec{r}_{0i}$ die Ortsvektoren \vec{r}_{0i} durch die Ortsvektoren $\vec{r}_{0i}(s)$ ersetzt:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t)(s) &= \sum_{j=0}^3 B_j(t) \underbrace{\vec{r}_{0j}(s)} && \left| \text{nach Gleichung (8) ersetzen} \right. \\ &= \sum_{i=0}^3 B_i(t) \left[\sum_{j=0}^3 B_j(s) \vec{r}_{ji} \right] && \left| B_i(t) \text{ hineinmultiplizieren} \right. \\ &= \sum_{i=0}^3 \left[\sum_{j=0}^3 B_i(t) B_j(s) \vec{r}_{ji} \right] && \left| \text{eckige Klammern weglassen} \right. \\ \vec{r}(t, s) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i(t) B_j(s) \vec{r}_{ji} && \text{für } 0 \leq t, s \leq 1 \quad (9) \end{aligned}$$

Dies ist die **Parameterdarstellung der Bézierfläche 3. Ordnung**. Dabei sind

$$B_i(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

und $i, j = 0, 1, 2, 3$

$$B_j(s) = \binom{3}{j} s^j (1-s)^{3-j}$$

die Bernsteinpolynome in den Variablen t bzw. s .

Übung

58

Aladdins Teppich

Gegeben seien die 16 Kontrollpunkte

- | | | | |
|-------------------------|---------------------|--------------------|--------------------|
| (i) $P_{00}(75 0 85)$ | $P_{01}(73 28 85)$ | $P_{02}(66 43 85)$ | $P_{03}(51 47 85)$ |
| $P_{10}(63 6 60)$ | $P_{11}(58 30 60)$ | $P_{12}(56 48 60)$ | $P_{13}(47 56 60)$ |
| $P_{20}(71 21 25)$ | $P_{21}(62 32 25)$ | $P_{22}(46 35 25)$ | $P_{23}(37 21 25)$ |
| $P_{30}(73 0 0)$ | $P_{31}(60 20 0)$ | $P_{32}(49 37 0)$ | $P_{33}(43 55 0)$ |
| (ii) $P_{00}(70 65 99)$ | $P_{01}(20 -40 80)$ | $P_{02}(30 35 70)$ | $P_{03}(0 10 60)$ |
| $P_{10}(55 10 40)$ | $P_{11}(15 -25 40)$ | $P_{12}(35 23 40)$ | $P_{13}(5 28 40)$ |
| $P_{20}(40 5 20)$ | $P_{21}(10 0 20)$ | $P_{22}(15 23 20)$ | $P_{23}(20 30 20)$ |
| $P_{30}(60 0 0)$ | $P_{31}(30 0 0)$ | $P_{32}(20 20 0)$ | $P_{33}(40 40 0)$ |

- Erstellen Sie für (i) und (ii) je eine Skizze von der Lage dieser Kontrollpunkte.
- Bilden Sie die Parameterdarstellung der zugehörigen Bézierflächen.
- Schreiben Sie in *Maple* (oder einem ähnlichen System) ein Programm, das diese Flächen darstellt. (TI-89 kann leider Flächen in Parameterdarstellung nicht zeichnerisch wiedergeben, ausser Sie schreiben ein passendes Programm dazu.)

Auch ein Teppich hat Gefühle, jedenfalls in Walt Disneys «Aladdin». Welche würden Sie dem Teppich (i) und welche dem Teppich (ii) zuschreiben?

59

Der traditionelle Bootsbau beginnt stets mit einer kleinen, von Hand geschnitzten Nachbildung eines Bootes, dem so genannten Rumpfmödel. Das Rumpfmödel gibt die Gestalt des Rumpfes wieder und liefert – nach entsprechender Umrechnung – die genauen Maße, die beim Bootsbau zu verwenden sind.

Hier sollen Sie ein vereinfachtes Verfahren benutzen, um den Bau eines Bootes auf Papier nachzuahmen:

- Modellieren Sie einen Schiffskörper aus Knetmasse.
- Zerschneiden Sie ihn senkrecht zur Längsachse in 4 bis 6 Scheiben.
- Umreißen Sie die Querschnitte mit einem Stift auf Papier.
- Zeichnen Sie für jeden Querschnitt das zugehörige Kontrollpolygon (siehe Übung 11).
- Ermitteln Sie die Koordinaten der Kontrollpunkte in einem Koordinatensystem.
- Zeichnen Sie die Bézierfläche mit *Maple* oder einem ähnlichen Programmsystem.

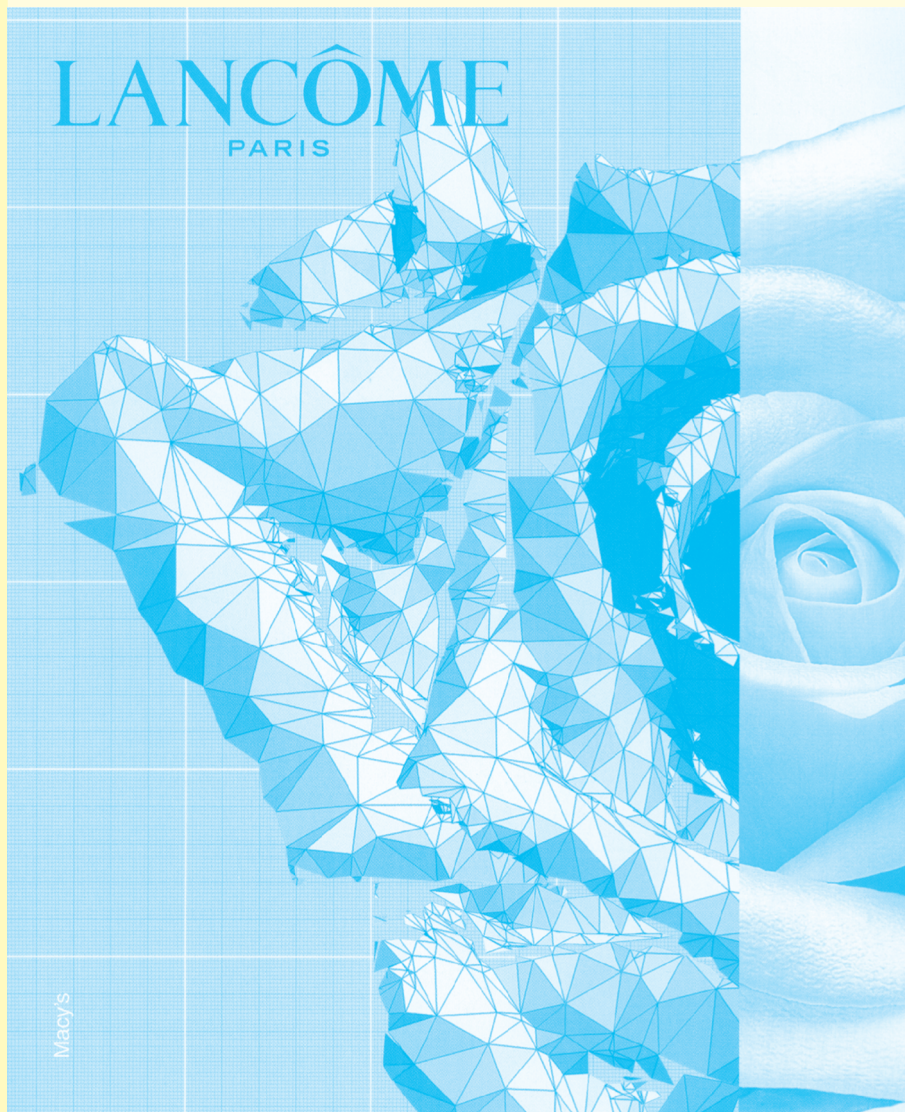


Abbildung 47
Werbung von Lancôme

Rückblick und Ausblick

- In der Praxis werden zur Darstellung geschmeidiger Oberflächen oft Kontrollnetze mit dreieckigen statt der eben betrachteten viereckigen Maschen verwendet. Viereckige Zerlegungen einer Oberfläche sind zwar einfacher zu verstehen und zu berechnen, doch die dreieckigen sind aus geometrischen Gründen für wirklichkeitsnahe Darstellungen tauglicher (siehe Abb. 47). In den vorangegangenen Übungen sind Sie jedoch mit Kontrollnetzen aus viereckigen Polygonen ausgekommen.
- Besonders bei älteren Videogames sind geometrische Formen durch Polygone dargestellt. Damit eine Fläche glatt erscheint, braucht es ein sehr feinmaschiges Netz aus Millionen von Polygonen, besonders wenn der Gegenstand im virtuellen Vordergrund erscheint. Derselbe Gegenstand, in den virtuellen Hintergrund gerückt, braucht aber wegen seiner geringeren Grösse weniger Maschen. Damit diese Maschen nicht neu festgelegt werden müssen, bedient man sich eines Algorithmus, der nach gewissen Regeln jeweils mehrere Maschen auflöst und sie zu einer einzigen verschmilzt. Diese neu entstandene Masche wird verkleinert in den virtuellen Hintergrund gesetzt. Etwa so muss man sich, in groben Zügen, das in Trickfilmen beliebte Zoomen vorstellen.

In neueren Videogames erlauben wenige Bézierflächenstücke auf Anhieb die Wiedergabe einer gewölbten Fläche. Bézierflächen sind in der Darstellung belebter, sich ständig ändernder Oberflächen, wie jene eines menschlichen oder tierischen Körpers, einfacher zu manipulieren und spielen daher in der Computeranimation eine bedeutende Rolle.

- Über den Aufwand bei der Herstellung computeranimierter Filme gibt die Website der Pixar Animation Studios Bescheid: In «A Bug's Life» (1998), der etwa 90 Minuten dauert, werden 2 TB ($2 \cdot 10^{12}$ Bytes) Speicherplatz benötigt, die sich so aufteilen: Filme laufen in 24 Bildern pro Sekunde. Ein 90-minütiger Film besteht daher aus 129 600 Bildern. Jedes Bild enthält 2048×872 Pixel (Punkte), jedes Pixel wiederum enthält 4 Bytes an Farbinformationen. Also enthält ein 90-Minuten-Film $129600 \cdot 2048 \cdot 872 \cdot 4$ Bytes von Daten und braucht damit etwa 0.925 TB Speicherplatz. Da aber erste Entwürfe, die in endgültigen Film weggeschnitten sind, ebenso gespeichert werden, sind etwa 2 TB Daten für «Das grosse Krabbeln» gespeichert worden. Zum Vergleich: «Toy Story» (1995) wurde in einer Qualität hergestellt, die zehnmal weniger Speicherplatz in Anspruch nahm. [Aus www.pixar.com]



Abbildung 48
«A Bug's Life», Walt Disney Studios; hergestellt durch Pixar Animation Studios, Richmond, California

Lösungen zu den Übungen

1

- a) Das Augenmerk fällt links auf die Mitte, rechts auf die Ecke rechts oben.
- b) Horizontale und Vertikale sind im linken Bild stärker betont.
- c) Die Krümmung ändert sich im rechten Bild stärker.
- d) Das Gebiet mit der stärkeren Krümmungsänderung, also Eigenschaft c), deutet auf grössere Bewegung hin und zieht daher unsere erste Aufmerksamkeit auf sich.

2

- a) Den meisten Leuten gefällt die geschwungene Schriftart besser.
- b) Die Schriftart links.
- c) Buchstaben sind stets in horizontalen Zeilen eines vertikalen Textblocks eingeordnet, und so ist es natürlich, dass die Buchstaben in sich diese beiden Richtungen tragen.
- d) Beim linken Buchstaben geht beim Schwänzchen rechts unten das Geradenstück plötzlich in starke Krümmung über. Rechts sind die Krümmungsübergänge viel sanfter.
- e) Das linke R ist mit Zirkel und Lineal konstruiert, das rechte zeigt in seinem sanften Schwung typische Eigenschaften der Bézierkurve, entstammt daher einer neueren Schriftart.

3

a)

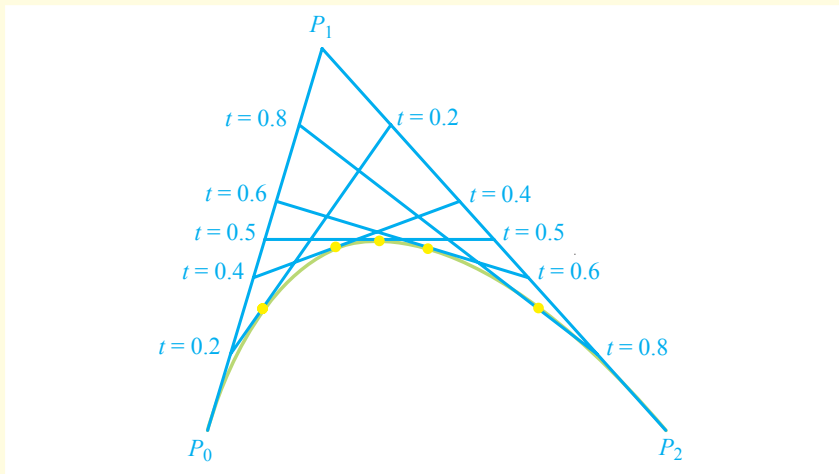


Abbildung 49
Konstruktion einiger Kurvenpunkte

- b) Im Drahtspannbild der Abbildung 8 unterscheiden sich die Höhen aufeinander folgender Nägel über der Grundlinie P_0P_2 je um $\frac{1}{20}$. Der Draht 10–10 ist Mittellinie des Dreiecks $P_0P_1P_2$. Bei den anderen Drähten liegen die linken Endpunkte um gleich viel unter- oder oberhalb der Mittellinie, wie die rechten Endpunkte ober- oder unterhalb der Mittellinie liegen. Diese Drähte werden nach dem 2. Strahlensatz von der Mittellinie halbiert. Der Kurvenpunkt ist – laut der Konstruktion von de Casteljau – auf Drähten mit niedriger Nummer (von 0 bis 9) *vor* der Drahtmitte und damit *unterhalb* der Mittellinie, auf Drähten mit hoher Nummer (von 11 bis 20) *nach* der Drahtmitte und damit wieder *unterhalb* der Mittellinie, sodass der Mittelpunkt des Drahtes 10–10 der *höchste* Punkt der Bézierkurve 2. Ordnung ist.

- c) Beispiele: Graphen von Potenz-, Exponential- oder trigonometrischen Funktionen. Zuerst Wertetabelle erstellen, dann die Punkte im Koordinatensystem eintragen.
Die genannten Graphen sind durch eine Funktionsgleichung gegeben, während Bézierkurven bisher rein geometrisch, ohne Gleichung, definiert worden sind.

4

Erster Schritt:

Die Punkte Q_1, Q_2 bzw. Q_3 teilen die Strecken $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}$ bzw. $\overline{P_2P_3}$ im Verhältnis $t : (1 - t)$.

Zweiter Schritt:

R_2, R_3 teilen die Strecken $\overline{Q_1Q_2}$ bzw. $\overline{Q_2Q_3}$ im Verhältnis $t : (1 - t)$.

Dritter Schritt:

S_3 teilt die Strecke $\overline{R_2R_3}$ im Verhältnis $t : (1 - t)$.

S_3 ist nun ein Punkt der Kurve zum Parameterwert t .

5

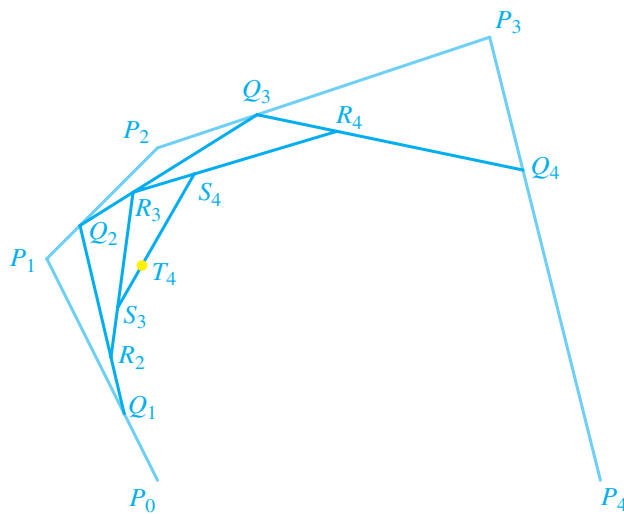


Abbildung 50
Konstruktion eines Kurvenpunktes bei fünf Kontrollpunkten

Ähnlich wie in Übung 4:

Q_i teilt $\overline{P_{i-1}P_i}$ im Verhältnis $t : (1 - t)$, $i = 1, 2, 3, 4$

R_i teilt $\overline{Q_{i-1}Q_i}$ im Verhältnis $t : (1 - t)$, $i = 2, 3, 4$

S_i teilt $\overline{R_{i-1}R_i}$ im Verhältnis $t : (1 - t)$, $i = 3, 4$

T_4 teilt $\overline{S_3S_4}$ im Verhältnis $t : (1 - t)$.

T_4 ist Punkt der Bézierkurve 4. Ordnung.

6

Konstruktionslinien zu den Parametern $t = \frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \dots, \frac{10}{10}$:

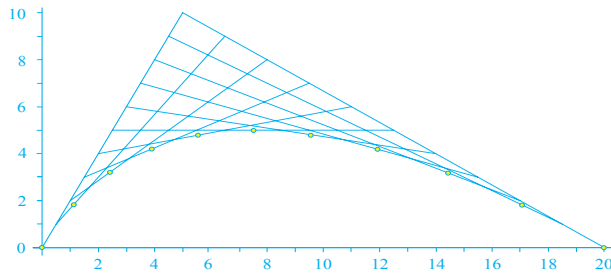


Abbildung 51
Konstruktion von elf Kurvenpunkten

7

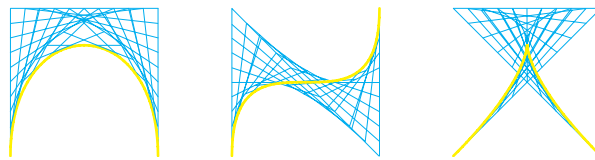


Abbildung 52
Bézierkurven und Konstruktionslinien zu quadratischen Kontrollpolygonen

8

a)

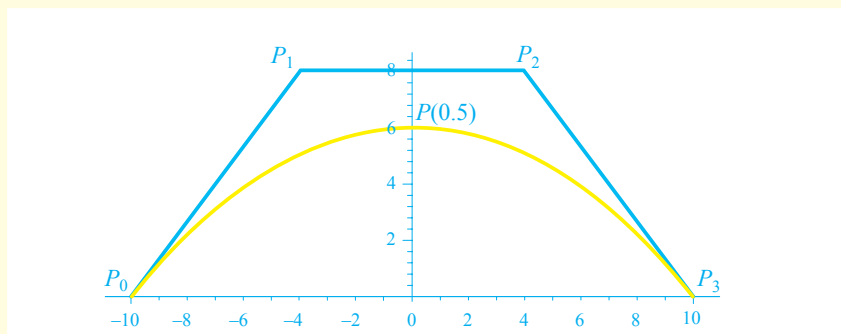


Abbildung 53
Bézierkurve zu trapezförmigem Kontrollpolygon

- b) Der Mittelpunkt $P(\frac{1}{2})$ der Kurve hat die Koordinaten $(0|6)$.
 c) Der Mittelpunkt $P(\frac{1}{2})$ der Kurve hat die Koordinaten $(0|\frac{3}{4}h)$.

9

Die im Folgenden vorkommenden Punkte beziehen sich auf die Konstruktion von de Casteljau in Abbildung 11.

Die Geraden P_0S_3 sind Sekanten der Kurve im Punkt P_0 . Rückt S_3 entlang der Bézierkurve zum Anfangspunkt P_0 , so nähert sich S_3 zunächst R_2 und dieser dem Punkt Q_1 . Q_1 liegt auf P_0P_1 . Somit nähert sich die Sekante P_0S_3 der Geraden P_0P_1 und fällt im Grenzfall mit ihr zusammen.

Entsprechendes gilt für die Tangente in P_3 .

10

- a) Nach Übung 3b erreicht die Kurve den höchsten Punkt bei $t = \frac{1}{2}$. Die zugehörigen Teilungspunkte Q_1 und Q_2 halbieren $\overline{P_0P_1}$ bzw. $\overline{P_1P_2}$. $P(\frac{1}{2}) = R_2$ ist Mittelpunkt der Mittellinie und liegt damit auch auf der Seitenhalbierenden $\overline{P_1M}$ (siehe Abb. 54).

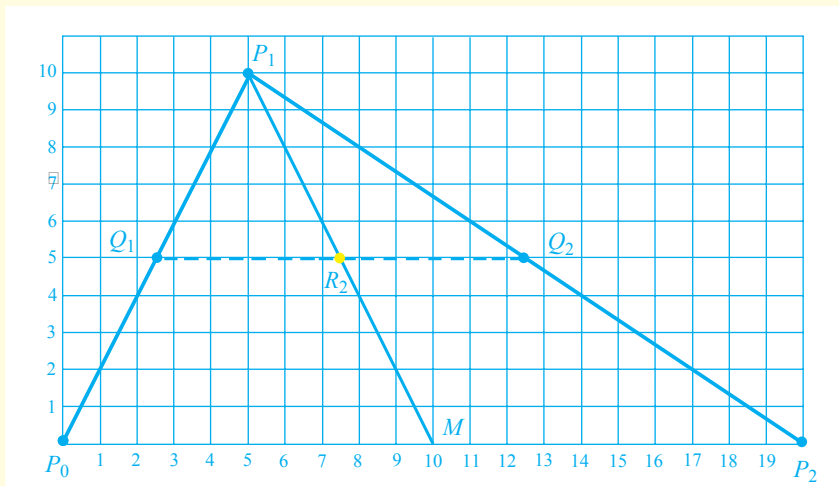


Abbildung 54
Rekonstruktion des Kontroll-
dreiecks

- b) P_0 und P_2 sind die Endpunkte der Kurve. M sei der Mittelpunkt von $\overline{P_0P_2}$. R_2 sei der höchste Punkt der Kurve, also jener Kurvenpunkt mit waagrechter Tangente. Dann liegt P_1 auf MR_2 doppelt so weit von M entfernt, als R_2 es ist: $P_0(0|0)$, $P_1(5|10)$, $P_2(20|0)$.

11

- a) Die Kontrollpunkte liegen symmetrisch in den Ecken eines gleichschenkligen Trapezes, eines Rechtecks oder eines Quadrates.
b) In Abbildung 55 werden alle entsprechenden Strecken halbiert. Nach den Strahlensätzen sind daher die Geraden P_0P_3 , Q_1Q_3 , UV , P_1P_2 zueinander parallel. Q_1 halbiert $\overline{P_0P_1}$, U halbiert $\overline{Q_1P_1}$. Also liegt U auf $\frac{3}{4}$ der Strecke $\overline{P_0P_1}$, V auf $\frac{3}{4}$ der Strecke $\overline{P_3P_2}$. Somit befindet sich der Kurvenpunkt $S_3 = P(\frac{1}{2})$ auf $\frac{3}{4}$ der Trapezhöhe.

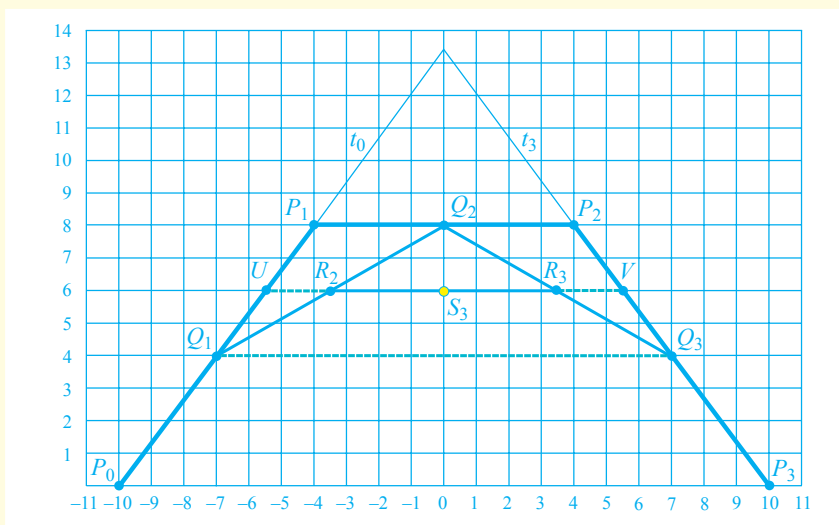


Abbildung 55
Symmetrisches Kontrolltrapez:
Trapezhöhe = $\frac{4}{3} \cdot$ Kurvenhöhe

- c) 1. Die Kontrollpunkte $P_0(-10|0)$ und $P_3(10|0)$ sind die Endpunkte der Bézierkurve.
2. Ziehe nach Augenmass in P_0 bzw. P_3 symmetrisch zur y -Achse die Tangenten t_0 und t_3 an die Kurve.
3. Ziehe die Parallele zu P_0P_3 durch $P(\frac{1}{2})$.
4. Diese Parallele schneidet die Tangente t_0 in U , die Tangente t_3 in V .
5. P_1 liegt auf $\frac{4}{3}$ der Strecke P_0U und hat die Koordinaten $(-4|8)$.
 P_2 liegt auf $\frac{4}{3}$ der Strecke P_3V und hat die Koordinaten $(4|8)$.

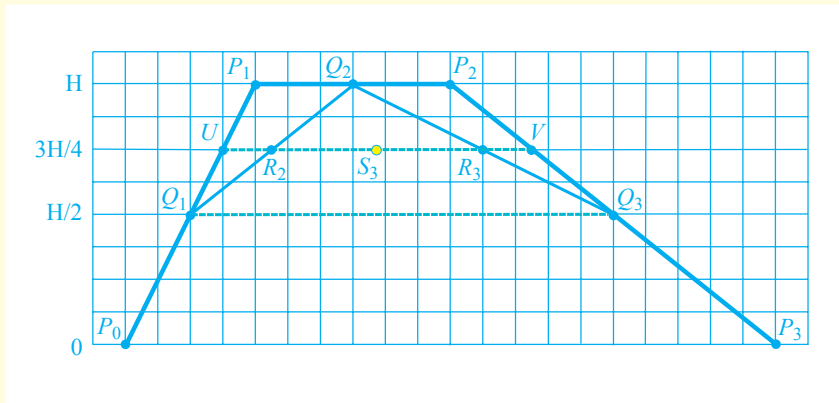


Abbildung 56
Allgemeines Kontrolltrapez:
Trapezhöhe = $\frac{4}{3} \cdot$ Kurvenhöhe

d) In Abbildung 56 liegt S_3 offensichtlich auf $\frac{3}{4}$ der Trapezhöhe.

12

b), c) $C = P_1$, $D = P_2$, weil die Kurvenhöhe $\frac{3}{4}$ der Trapezhöhe beträgt.

13

- a) $P(\frac{1}{2})(10|12.5)$
- b) $\overline{P}(\frac{1}{2})(10|16.25)$
- c) um 3.75 Einheiten in y -Richtung
- d) 37.5%

14

a) Für P_0 gibt es 4 Möglichkeiten zur Auswahl, für P_1 3, für P_2 2, für P_3 1 Möglichkeit, also insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Kontrollpolygone:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_0	P_1	P_2	P_3	P_0	P_1	P_2	P_3	P_0	P_1	P_2	P_3
A	B	C	D	B	A	C	D	C	A	B	D	D	A	C	B
A	B	D	C	B	A	D	C	C	A	D	B	D	A	B	C
A	C	B	D	B	C	A	D	C	B	A	D	D	B	A	C
A	C	D	B	B	C	D	A	C	B	D	A	D	B	C	A
A	D	B	C	B	D	A	C	C	D	A	B	D	C	A	B
A	D	C	B	B	D	C	A	C	D	B	A	D	C	B	A

b) Ein Programm für den Polygonzug $P_0P_1P_2P_3$ auf dem TI-83 bzw. TI-89 ist etwa

```

PROGRAM:UEB14                                :ueb14()
:ClrDraw                                     :Prgm
:ZSquare                                     :ClrDraw
:Input "POX=", A                             :ZoomSqr
:Input "POY=", B                             :Input "p0x=", p0x
:Input "P1X=", C                             :Input "p0y=", p0y
:Input "P1Y=", D                             :Input "p1x=", p1x
:Input "P2X=", E                             :Input "p1y=", p1y
:Input "P2Y=", F                             :Input "p2x=", p2x
:Input "P3X=", G                             :Input "p2y=", p2y
:Input "P3Y=", H                             :Input "p3x=", p3x
:Line(A,B,C,D)                               :Input "p3y=", p3y
:Line(C,D,E,F)                               :Line p0x,p0y,p1x,p1y
:Line(E,F,G,H)                               :Line p1x,p1y,p2x,p2y
                                              :Line p2x,p2y,p3x,p3y
                                              :EndPrgm

```

15

a) $(x_T - x_A) : (x_B - x_T) = t : (1 - t)$

$$(1 - t) \cdot (x_T - x_A) = t \cdot (x_B - x_T)$$

$$x_T - t \cdot x_T - (1 - t) \cdot x_A = t \cdot x_B - t \cdot x_T \quad | +t \cdot x_T + (1 - t) \cdot x_A$$

$$x_T = (1 - t) \cdot x_A + t \cdot x_B$$

b) $\vec{r}_T = \frac{7}{10} \cdot \vec{r}_A + \frac{3}{10} \cdot \vec{r}_B$

Proportion in Produktgleichung
verwandeln
ausmultiplizieren

16

a) $\vec{r}_{Q_1} = \frac{7}{10} \cdot \vec{r}_0 + \frac{3}{10} \cdot \vec{r}_1$ usw.

$$\vec{r}_{R_2} = \frac{7}{10} \cdot \vec{r}_{Q_1} + \frac{3}{10} \cdot \vec{r}_{Q_2}$$
 usw.

$$\vec{r}_{S_3} = \frac{7}{10} \cdot \vec{r}_{R_2} + \frac{3}{10} \cdot \vec{r}_{R_3}$$

b) Programmcode:

PROGRAM:UEB16

:ClrDraw

:ZSquare

:Input "POX=", A

:Input "POY=", B

:Input "P1X=", C

:Input "P1Y=", D

:Input "P2X=", E

:Input "P2Y=", F

:Input "P3X=", G

:Input "P3Y=", H

:7/10 * A + 3/10 * C → I

:7/10 * B + 3/10 * D → J

:7/10 * C + 3/10 * E → K

:7/10 * D + 3/10 * F → L

:7/10 * E + 3/10 * G → M

:7/10 * F + 3/10 * H → N

:7/10 * I + 3/10 * K → O

:7/10 * J + 3/10 * L → P

:7/10 * K + 3/10 * M → Q

:7/10 * L + 3/10 * N → R

:7/10 * O + 3/10 * Q → S

:7/10 * P + 3/10 * R → U

:Line(A,B,C,D)

:Line(C,D,E,F)

:Line(E,F,G,H)

:Line(I,J,K,L)

:Line(K,L,M,N)

:Line(O,P,Q,R)

:Pt-Change(S,U)

17

a)

$$\vec{r}_{Q_1} = (1-t) \cdot \vec{r}_0 + t \cdot \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_{Q_2} = (1-t) \cdot \vec{r}_1 + t \cdot \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_{Q_3} = (1-t) \cdot \vec{r}_2 + t \cdot \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_{R_2} = (1-t) \cdot \vec{r}_{Q_1} + t \cdot \vec{r}_{Q_2}$$

$$\vec{r}_{R_3} = (1-t) \cdot \vec{r}_{Q_2} + t \cdot \vec{r}_{Q_3}$$

$$\vec{r}_{S_3} = (1-t) \cdot \vec{r}_{R_2} + t \cdot \vec{r}_{R_3}$$

b) **TI-83**

```
PROGRAM:UEB17
:ClrHome
:ClrDraw
:ZSquare
:Input "POX=", A
:Input "POY=", B
:Input "P1X=", C
:Input "P1Y=", D
:Input "P2X=", E
:Input "P2Y=", F
:Input "P3X=", G
:Input "P3Y=", H
:For (T,0,1,0.1)
:(1-T) → L
:L * A + T * C → I
:L * B + T * D → J
:L * C + T * E → K
:L * D + T * F → L
:L * E + T * G → M
:L * F + T * H → N
:L * I + T * K → O
:L * J + T * L → P
:L * K + T * M → Q
:L * L + T * N → R
:L * O + T * Q → S
:L * P + T * R → U
:Line(A,B,C,D)
:Line(C,D,E,F)
:Line(E,F,G,H)
:Line(I,J,K,L)
:Line(K,L,M,N)
:Line(O,P,Q,R)
:Pt-Change(S,U)
:End
```

TI-89

```
:ueb17()
:Prgm
:ClrHome
:ClrDraw
:ZoomSqr
:Input "p0x=", p0x
:Input "p0y=", p0y
:Input "p1x=", p1x
:Input "p1y=", p1y
:Input "p2x=", p2x
:Input "p2y=", p2y
:Input "p3x=", p3x
:Input "p3y=", p3y
:For t,0,1,0.1
:(1-t) → l
:l*p0x+t*p1x → q1x
:l*p1x+t*p2x → q2x
:l*p2x+t*p3x → q3x
:l*q1x+t*q2x → r2x
:l*q2x+t*q3x → r3x
:l*r2x+t*r3x → s3x
:l*p0y+t*p1y → q1y
:l*p1y+t*p2y → q2y
:l*p2y+t*p3y → q3y
:l*q1y+t*q2y → r2y
:l*q2y+t*q3y → r3y
:l*r2y+t*r3y → s3y
:Line p0x,p0y,p1x,p1y
:Line p1x,p1y,p2x,p2y
:Line p2x,p2y,p3x,p3y
:Line q1x,q1y,q2x,q2y
:Line q2x,q2y,q3x,q3y
:Line r2x,r2y,r3x,r3y
:PtChg s3x,s3y
:EndFor
:EndPrgm
```

18

- a) Entfernen Sie aus dem Programmcode der Übung 17 jene Zeilen, welche die Q -Punkte miteinander verbinden.
 b) Die Strecken $\overline{R_2R_3}$ liegen tangential an die Bézierkurve.

19

Entfernen Sie aus dem Programmcode der Übung 18 zusätzlich jene Zeilen, die mit **Line** beginnen.

20

Ersetzen Sie nach Anleitung die Input-Zeilen aus Übung 19.

21

Ersetzen Sie nach Anleitung die Input-Zeilen aus Übung 19:

TI-83

```
PROGRAM:UEB21
:ClrHome
:ClrDraw
:ZSquare
:[A] (1,1) → A
:[A] (1,2) → B
:[A] (2,1) → C
:[A] (2,2) → D
:[A] (3,1) → E
:[A] (3,2) → F
:[A] (4,1) → G
:[A] (4,2) → H
:For (T,0,1,0.05)
:(1-T) → L
:L * A + T * C → I
:L * B + T * D → J
:L * C + T * E → K
:L * D + T * F → L
:L * E + T * G → M
:L * F + T * H → N
:L * I + T * K → O
:L * J + T * L → P
:L * K + T * M → Q
:L * L + T * N → R
:L * O + T * Q → S
:L * P + T * R → U
:Pt-On(S,U)
:End
```

TI-98

```
:ueb21()
:Prgm
:ClrHome
:ClrDraw
:ZoomSqr
:klmx[1,1] → p0x
:klmx[1,2] → p0y
:klmx[2,1] → p1x
:klmx[2,2] → p1y
:klmx[3,1] → p2x
:klmx[3,2] → p2y
:klmx[4,1] → p3x
:klmx[4,2] → p3y
:For t,0,1,0.05
:(1-t) → l
:l*p0x+t*p1x → q1x
:l*p1x+t*p2x → q2x
:l*p2x+t*p3x → q3x
:l*q1x+t*q2x → r2x
:l*q2x+t*q3x → r3x
:l*r2x+t*r3x → s3x
:l*p0y+t*p1y → q1y
:l*p1y+t*p2y → q2y
:l*p2y+t*p3y → q3y
:l*q1y+t*q2y → r2y
:l*q2y+t*q3y → r3y
:l*r2y+t*r3y → s3y
:PtOn s3x,s3y
:EndFor
:EndPrgm
```

22

```

TI-83
PROGRAM:UEB22
:ClrHome
:ClrDraw
:ZSquare
:Input "ANZAHL SEGMENTE N=",N
:If N ≥ 1
:Then
:For (K,1,N,1)
:Input "POX=", A
      ⋮
(wie Übung 19)
      ⋮
:PtOn(S,U)
:End
:End
:End

```

```

TI-89
:ueb22()
:Prgm
:ClrHome
:ClrDraw
:ZoomSqr
:Input "Anzahl Segmente n=",n
:If n ≥ 1 Then
: For k,1,n,1
: Input "p0x=", p0x
      ⋮
(wie Übung 19)
      ⋮
: PtOn s3x,s3y
: EndFor ©t
: EndFor ©k
:EndIf
:EndPrgm

```

23

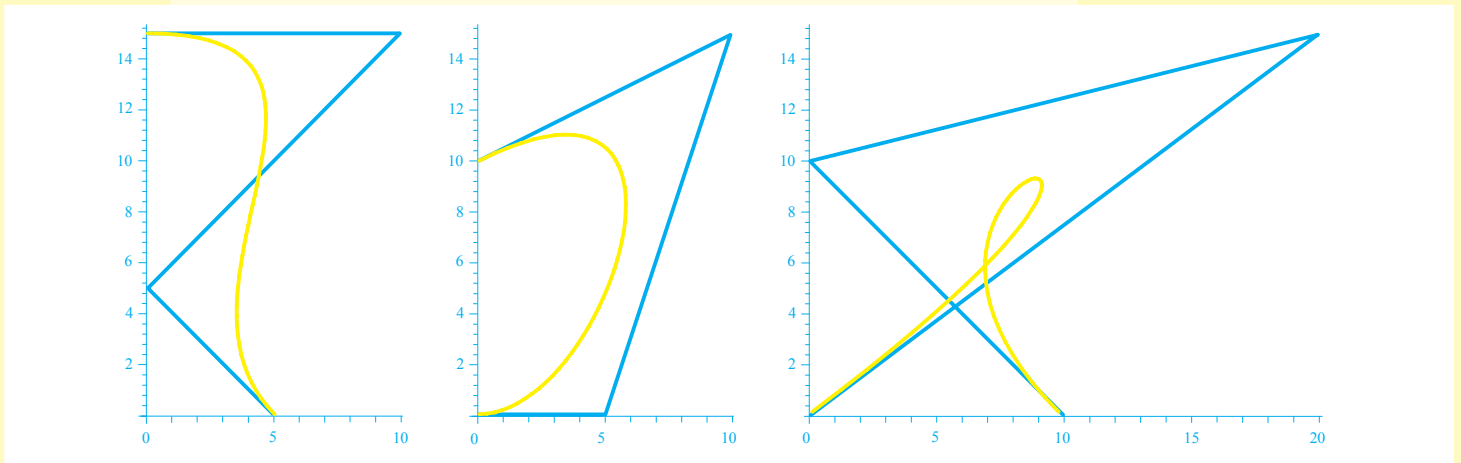


Abbildung 57
Engelshaar, Herzhälfte und
Schleife

24

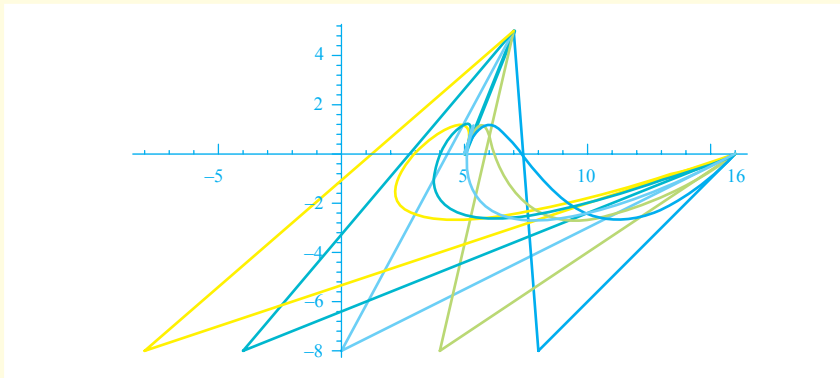


Abbildung 58
Wandernder Kontrollpunkt P_2

25

a)

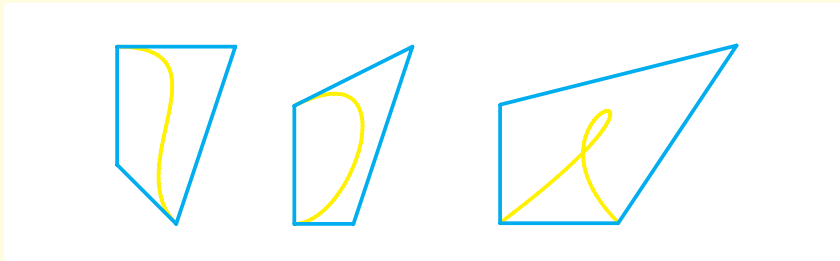


Abbildung 59
Konvexe Hüllen der
Kontrollpunkte zu Übung 23

- b) Die konvexe Hülle von P_0, P_1, P_2 und P_3 enthält natürlich alle Punkte P_0, P_1, P_2 und P_3 . Damit enthält sie auch alle ihre Verbindungsstrecken und insbesondere die Punkte Q_1, Q_2 und Q_3 , die auf ihnen liegen. Mit gleichem Recht lässt sich sagen, dass auch die Teilungspunkte R_2 und R_3 in ihr enthalten sind und ebenso der Kurvenpunkt S_3 .

26

Sowohl a) Kontrollpolygon als auch b) konvexe Hülle, als auch c) Bézierkurve fallen mit der kürzesten Strecke, die alle vier Kontrollpunkte enthält, zusammen.

27

Die Polygonseiten müssen sich «stark genug» kreuzen, d.h. im Kontrolltrapez ist $\overline{P_1P_2} > \overline{P_0P_3}$.

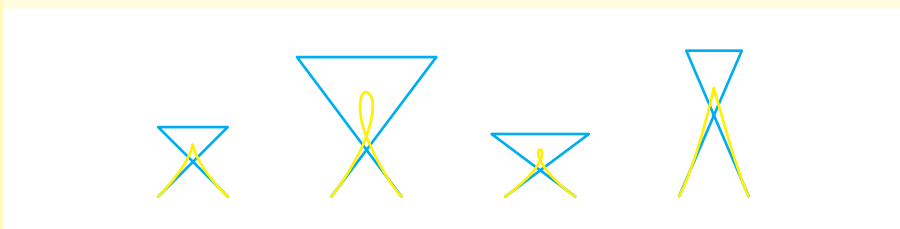


Abbildung 60
Verschlungene Bézierkurven

28

- a) Bei einer geschlossenen Bézierkurve müssen P_0 und P_n zusammenfallen.
 b) Damit die geschlossene Bézierkurve zudem keine Spitzen aufweist, muss die Anfangstangente parallel zur Endtangente verlaufen. Da bekanntlich die Tangenten in den Anfangs- und Endpunkten entlang der ersten und der letzten Polygonseiten P_0P_1 bzw. $P_{n-1}P_n$ verlaufen, müssen P_0 , P_1 und P_{n-1} auf einer Geraden liegen. Beispiel von Kontrollpolygonen:

	Kurve	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
a)	Tropfen	(0 0)	(-5 5)	(0 10)	(5 5)	(0 0)
b)	Erbse	(10 0)	(5 0)	(10 10)	(15 0)	(10 0)

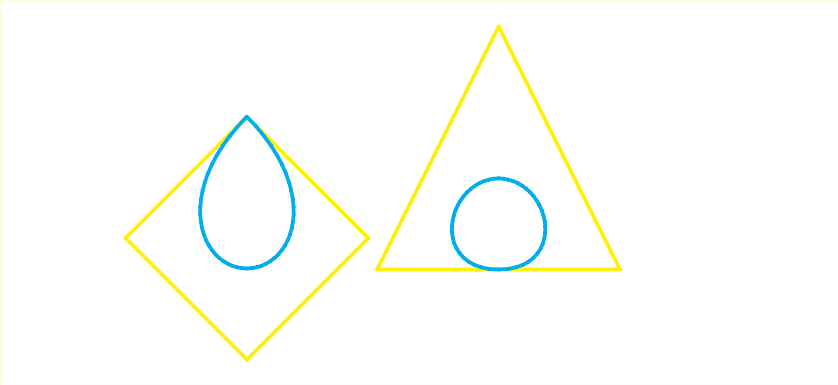


Abbildung 61
Tropfen und Erbse:
Bézierkurven mit
Kontrollpolygonen

29

- a) $P_2(7|+15)$ $P_3(10|0)$
 b) $P_2(7|-15)$ $P_3(10|0)$

30

Für die Bézierkurve 2. Ordnung ist $h = \frac{1}{2}H$ ($h =$ Kurvenhöhe)
 Für die Bézierkurve 3. Ordnung ist $h = \frac{3}{4}H$ ($H =$ Dreieckshöhe)
 Daher gibt es nicht dieselbe Kurve (siehe Abb. 62).

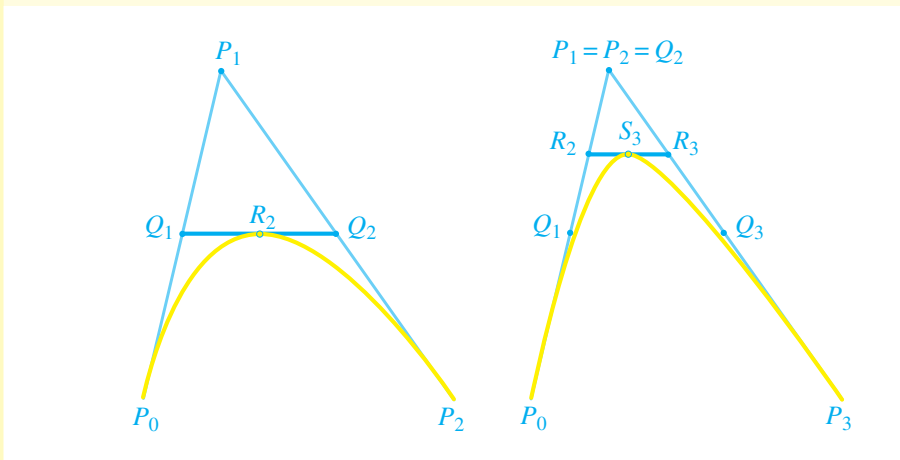


Abbildung 62
Links Bézierkurve 2. Ordnung,
rechts Bézierkurve 3. Ordnung
mit $P_1 = P_2$

31

Oktober 2002, Mark Hofer: Bezier Curve Demo (mit Java Source Code)
<http://www.math.ucla.edu/~baker/java/hofer/Bezier.htm>

Oktober 2002, Interactive Bezier Splines, a Java program
<http://www.sunsite.ubc.ca/LivingMathematics/V001N01/UBCEexamples/Bezier/bezier.html>

- a)
- | | | |
|------|-------------------|--|
| APPS | 1:Flash Apps | Cabri Geometry |
| | | New |
| | | Type: Figure |
| | | Folder: main |
| | | Variable: castel |
| | | (Strecke zeichnen) |
| F2 | 5:Segment | |
| F2 | 2:Point on Object | (Teilungspunkt setzen) |
| F6 | 1:Distance | (kurze Teilstrecke messen) z. B. 0.48cm |
| F6 | 1:Distance | (ganze Strecke messen) z. B. 2.38cm |
| F6 | 6:Calculate | a/b (für a Zahl 0.48 cm anklicken)
(für b Zahl 2.38 cm anklicken) z. B. R: 0.20 |
| F2 | 5:Segment | (Strecke P_0P_1 zeichnen) |
| F2 | 5:Segment | (Strecke P_1P_2 zeichnen) |
| F2 | 5:Segment | (Strecke P_2P_3 zeichnen) |
| F5 | 3:Dilation | (Teilungspunkt Q_1 konstruieren) |
| F5 | 3:Dilation | (Teilungspunkt Q_2 konstruieren) |
| F5 | 3:Dilation | (Teilungspunkt Q_3 konstruieren) |
| F2 | 5:Segment | (Strecke Q_1Q_2 zeichnen) |
| F2 | 5:Segment | (Strecke Q_2Q_3 zeichnen) |
| F5 | 3:Dilation | (Teilungspunkt R_2 konstruieren) |
| F5 | 3:Dilation | (Teilungspunkt R_3 konstruieren) |
| F2 | 5:Segment | (Strecke R_2R_3 zeichnen) |
| F5 | 3:Dilation | (Teilungspunkt S_3 konstruieren) |
- b)
- | | | |
|------|--------------------|----------------------------------|
| F7 | 2:Trace On | (Bezierpunkt S_3 anwählen) |
| F7 | 3:Animation | (Teilpunkt auf Strecke anwählen) |
| Hand | Cursor (re. od.li) | (loslassen, S_3 wandert) |
| ESC | | (Zum Anhalten) |
- c)
- | | | |
|------|-------------|-----------------------------------|
| F1 | 1:Pointer | (P_2 anwählen) |
| F7 | 3:Animation | (Konstruktion wandert mit P_2) |
| Hand | | |

Der Übersicht halber, sei vorübergehend \vec{r}_{S_3} durch S_3 usw. abgekürzt:

- a) $S_3 = (1-t) \cdot R_2 + t \cdot R_3$ (nach Übung 15)
- b) $S_3 = (1-t)[(1-t)Q_1 + tQ_2] + t[(1-t)Q_2 + tQ_3]$
 $= (1-t)^2 \cdot Q_1 + 2t(1-t) \cdot Q_2 + t^2 \cdot Q_3$
- c) $S_3 = (1-t)^2[(1-t)P_0 + tP_1] + 2t(1-t)[(1-t)P_1 + tP_2] + t^2[(1-t)P_2 + tP_3]$
 $= (1-t)^3 \cdot P_0 + 3(1-t)^2t \cdot P_1 + 3(1-t)t^2 \cdot P_2 + t^3 \cdot P_3$
 $\vec{r}(t) = (1-t)^3 \cdot \vec{r}_0 + 3(1-t)^2t \cdot \vec{r}_1 + 3(1-t)t^2 \cdot \vec{r}_2 + t^3 \cdot \vec{r}_3$

34

- a) $\vec{r}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{729}{1000} \vec{r}_0 + \frac{243}{1000} \vec{r}_1 + \frac{27}{1000} \vec{r}_2 + \frac{1}{1000} \vec{r}_3$
 $\vec{r}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \vec{r}_0 + \frac{3}{8} \vec{r}_1 + \frac{3}{8} \vec{r}_2 + \frac{1}{8} \vec{r}_3$
 $\vec{r}\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{1}{1000} \vec{r}_0 + \frac{27}{1000} \vec{r}_1 + \frac{243}{1000} \vec{r}_2 + \frac{729}{1000} \vec{r}_3$
- b) näher, grösser
 c) 72.9%, 24.3%, 2.7%, 0.1%
 d) Die Summe ergibt jedesmal 100%.

35

- a) Die Hochzahlen der Potenzen von $(1-t)$ nehmen von 3 nach 0 ab.
 b) Die Hochzahlen der Potenzen von t nehmen von 0 nach 3 zu.
 c) Die Faktoren vor den Potenzen von $(1-t)$ und t sind 1, 3, 3, 1.
 d) Diese Faktoren 1, 3, 3, 1 kommen im Pascalschen Dreieck vor, ebenso als Koeffizienten in $1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3 = (x+y)^3$.

36

a)

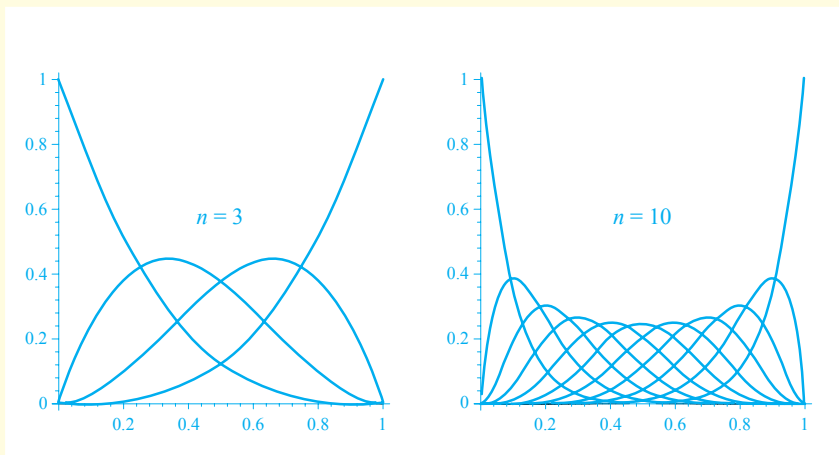


Abbildung 63
Die Graphen der Bernsteinpolynome der Ordnungen 3 bzw. 10

- b) Das Maximum von B_0^n ist bei 0, ..., von B_i^n bei $\frac{i}{n}$, ..., von B_n^n bei 1; d. h., die Maxima sind gleichmässig über das Intervall $[0, 1]$ verteilt (siehe Abb. 63).
- c) $n = 3$: $i = 0$: $B_0^3(t) = (1-t)^3$ B_0^3 maximal für $t = 0$ $B_0^3(0) = 1$
 $i = 1$: $B_1^3(t) = 3(1-t)^2t$
 $B_1^{3'}(t) = 3 - 12t + 9t^2 = 0$
 $B_1^{3''}(t) = -12 + 18t$ B_1^3 maximal für $t = \frac{1}{3}$ $B_1^3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$
 $i = 2$: $B_2^3(t) = 3(1-t)t^2$
 $B_2^{3'}(t) = 6t - 9t^2 = 0$
 $B_2^{3''}(t) = 6 - 18t$ B_2^3 maximal für $t = \frac{2}{3}$ $B_2^3\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$
 $i = 3$: $B_3^3(t) = t^3$ B_3^3 maximal für $t = 1$ $B_3^3(1) = 1$

n allgemein:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

$$B_i^{n'}(t) = \binom{n}{i} t^{i-1} \cdot (1-t)^{n-i-1} \cdot [i - nt] = 0 \text{ für } t = \frac{i}{n}$$

Also ist B_i^n maximal für $t = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$

37

- a) Im Bernsteinpolynom $B_i^n(t) = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$ mit $i = 0, \dots, n$ und $t \in [0, 1]$ sind alle Faktoren positiv oder null. Die Bernsteinpolynome verlaufen immer oberhalb der t -Achse.
- b) Beim binomischen Potenzieren erhält man mit dem Pascalschen Dreieck

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i}$$

Setzt man $x = t$ und $y = 1 - t$ ein, so ist

$$1 = (t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i \cdot (1 - t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

- c) Aus der Symmetrie des Pascalschen Dreiecks folgt $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$, daher gilt $B_{n-i}^n(1-t) = \binom{n}{n-i} (1-t)^{n-i} (1-(1-t))^{n-(n-i)} = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = B_i^n(t)$

Das $(n-i)$ -te Bernsteinpolynom nimmt – rückwärts durchlaufen – die gleichen Werte an wie das vorwärts durchlaufene i -te Bernsteinpolynom. Für die Bézierkurve bedeutet es, dass bei rückwärtiger Nummerierung der Kontrollpunkte dieselbe Bézierkurve durchlaufen wird. Mit anderen Worten, die Bézierkurve zu den Kontrollpolygone $P_0P_1P_2P_3$ und $P_3P_2P_1P_0$ sind gleich.

38

- a) Mit Hilfe des Programms aus Übung 22 (mit Kette von 2 Segmenten) kann das Nike-Logo annähernd erzeugt werden, wenn z. B. folgende Kontrollpunkte gewählt werden:

Segment	P_0	P_1	P_2	P_3
oben	(150 0)	(-40 -50)	(10 -25)	(25 0)
unten	(150 0)	(-80 -90)	(-15 -35)	(25 0)

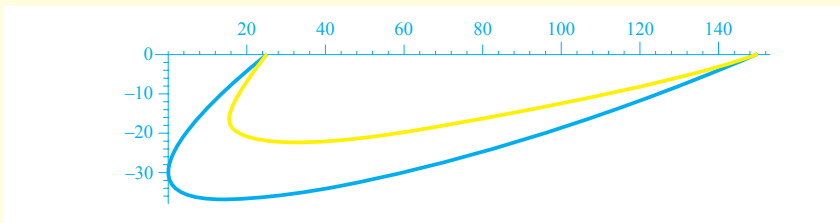


Abbildung 64
Nike-Logo: erster Versuch

- b) Das Nike-Logo lässt sich in vier Teilsegmente zerlegen, die entweder symmetrisch oder geradlinig sind. Hier sind die aus der Vermessung und der nachfolgenden Konstruktion (siehe Übungen 11 und 26) gewonnenen Kontrollpunkte tabellarisch zusammengestellt:

Segment	P_0	P_1	P_2	P_3
k_1	(82 0)	(46 -48)	(59 -66)	(114 -42)
k_2	(114 -42)	(170 -18)	(210 0)	(210 0)
k_3	(82 0)	(73 -29)	(77 -34)	(104 -28)
k_4	(104 -28)	(131 -22)	(210 0)	(210 0)

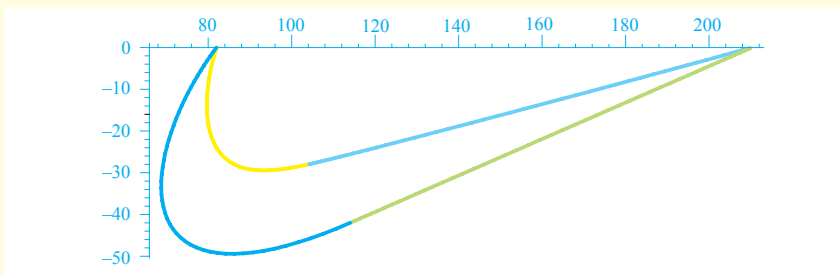


Abbildung 65
Nike-Logo: zweiter Versuch

- a) Bézierkurven 2. Ordnung können keine Kurven mit Wendepunkten darstellen.
 b) Der Hochpunkt der Bézierkurve 2. Ordnung liegt auf halber Dreieckshöhe.
 c) Für die erste Kurve gilt, dass $P(\frac{1}{2})$ auf der halben Dreieckshöhe liegt, also die Koordinaten $(0|4.5)$ haben muss. Für die zweite Kurve gilt, dass $P(\frac{1}{2})$ auf drei Viertel der Trapezhöhe liegt, also auch die Koordinaten $(0|4.5)$ hat.
 d) Die Bézierkurve 2. Ordnung hat die Gleichung

$$\vec{r}(t) = (1-t)^2 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2(1-t) \cdot t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 12t \\ 18t - 18t^2 \end{pmatrix},$$

welche mit derjenigen der gegebenen Bézierkurve 3. Ordnung übereinstimmt:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1-t)^3 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 + 12t \\ 18t - 18t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

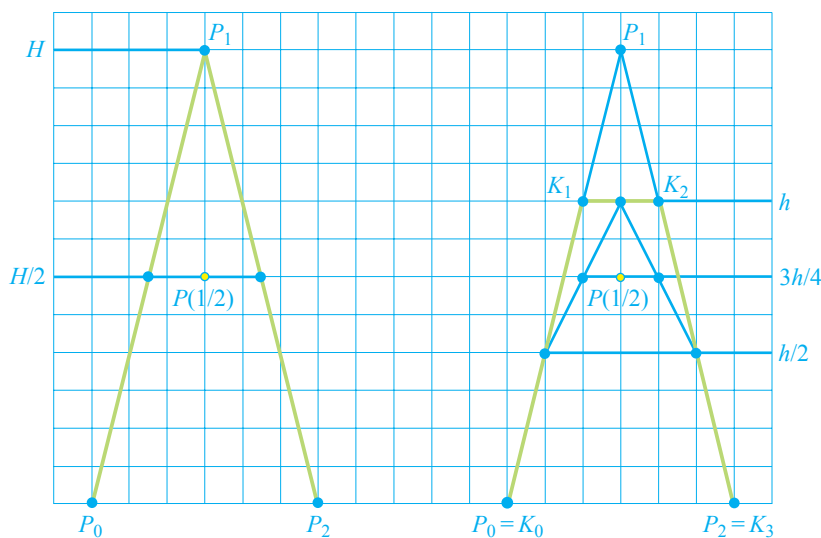


Abbildung 66
 Konstruktion von $P(\frac{1}{2})$: links die Bézierkurve 2. Ordnung, rechts jene der 3. Ordnung

H ist die Höhe des gleichschenkligen Kontrolldreiecks $P_0P_1P_2$. Der Mittelpunkt $P(\frac{1}{2})$ der symmetrischen Kurve liegt auf halber Höhe des Kontrolldreiecks.

h ist die Höhe des gleichschenkligen Kontrolltrapezes K_0, K_1, K_2, K_3 . Der Mittelpunkt $P(\frac{1}{2})$ der symmetrischen Kurve liegt auf drei Viertel der Höhe des Kontrolltrapezes.

Also gilt $\frac{1}{2} \cdot H = \frac{3}{4} \cdot h$ und somit $h = \frac{2}{3} \cdot H$. Die neuen Kontrollpunkte K_1 und K_2 haben daher die Ortsvektoren $\vec{r}_{K_1} = \frac{1}{3}\vec{r}_{P_0} + \frac{2}{3}\vec{r}_{P_1}$ und $\vec{r}_{K_2} = \frac{2}{3}\vec{r}_{P_1} + \frac{1}{3}\vec{r}_{P_2}$.

Die neue Bézierkurve 3. Ordnung mit der Gleichung

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1-t)^3 \vec{r}_{K_0} + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot \vec{r}_{K_1} + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot \vec{r}_{K_2} + t^3 \cdot \vec{r}_{K_3} \\ &= (1-t)^3 \vec{r}_0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot \left[\frac{1}{3}\vec{r}_0 + \frac{2}{3}\vec{r}_1 \right] + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot \left[\frac{2}{3}\vec{r}_1 + \frac{1}{3}\vec{r}_2 \right] + t^3 \cdot \vec{r}_2 \\ &= (1-t)^2 \vec{r}_0 + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot \vec{r}_1 + t^2 \cdot \vec{r}_2 \end{aligned}$$

stimmt mit der ursprünglichen Bézierkurve 2. Ordnung überein.

42

Die gegebenen Ansätze für K_1 und K_2 in die Formel für die Bézierkurve 3. Ordnung eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (1-t)^3 \cdot \vec{r}_{K_0} + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot \vec{r}_{K_1} + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot \vec{r}_{K_2} + t^3 \vec{r}_{K_3} \\ &= (1-t)^3 \vec{r}_0 + 3(1-t)^2 t [(1-a)\vec{r}_0 + a\vec{r}_1] + 3(1-t)t^2 [(1-b)\vec{r}_1 + b\vec{r}_2] + t^3 \vec{r}_2 \\ &= \vec{r}_0 \cdot (1-t)^2 [(1-t) + 3(1-a)t] + \vec{r}_1 \cdot 3(1-t)t[a(1-t) + (1-b)t] + \\ &\quad + \vec{r}_2 \cdot t^2 [3b(1-t) + t]\end{aligned}$$

Da diese Formel mit jener der Bézierkurve 2. Ordnung

$$\vec{r}(t) = (1-t)^2 \cdot \vec{r}_0 + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot \vec{r}_1 + t^2 \cdot \vec{r}_2$$

übereinstimmen muss, erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}(1-t) + 3 \cdot (1-a) \cdot t &= 1 \\ 3 \cdot [a \cdot (1-t) + (1-b) \cdot t] &= 2 \\ 3 \cdot b \cdot (1-t) + t &= 1\end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sind für jeden Parameter t erfüllt, wenn $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$ ist.

43

a) Die Kontrollpunkte für den inneren, unteren Kurventeil k_1 erhält man folgendermassen:

Wegen der vertikalen Tangenten in P_0 und P_3 ist das Kontrollpolygon für k_1 ein Rechteck mit Grundlinie $P_0(-2.5|0)$ und $P_3(2.5|0)$. Da die Rechteckshöhe $H = \frac{4}{3} \cdot$ Kurvenhöhe $h = \frac{4}{3} \cdot (-3.9) = -5.2$ sein muss, ist die Decklinie durch $P_1(-2.5|-5.2)$ und $P_2(2.5|-5.2)$ gegeben.

Die Kontrollpunkte der anderen Kurventeile ersehen Sie aus der Tabelle.

Kurventeil	P_0	P_1	P_2	P_3
k_1	(-2.5 0)	(-2.5 -5.2)	(2.5 -5.2)	(2.5 0)
k_3	(-2.5 0)	(-2.5 +5.2)	(2.5 +5.2)	(2.5 0)
k_2	(-3.5 0)	(-3.5 -5.6)	(3.5 -5.6)	(3.5 0)
k_4	(-3.5 0)	(-3.5 +5.6)	(3.5 +5.6)	(3.5 0)

b, c) Nach Übung 10 erhält man die Kontrollpunkte für die Cauda (das Schwänzchen im Q):

Kurventeil	P_0	P_1	P_2
k_5	(0.6 -4.2)	(4.0 -5.5)	(6 -4.9)
k_6	(0.4 -4.2)	(3.4 -6.7)	(6 -4.9)

Gemäss Übung 42 gilt für k_5

$$\begin{aligned}\vec{r}_{K_1} &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ -4.2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4.0 \\ -5.5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.9 \\ -5.1 \end{pmatrix} \\ \vec{r}_{K_2} &= \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4.0 \\ -5.5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6.0 \\ -4.9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.7 \\ -5.3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für k_6 . Zusammenfassung der Koordinaten:

Kurventeil	P_0	P_1	P_2	P_3
k_5	(0.6 -4.2)	(2.9 -5.1)	(4.7 -5.3)	(6 -4.9)
k_6	(0.4 -4.2)	(2.5 -5.9)	(4.3 -6.1)	(6 -4.9)

d) Mit diesen Daten können Sie das Taschenrechnerprogramm aus Übung 22 für eine Kette von 6 Bézierkurve 3. Ordnung benutzen, um die Kontur des Buchstabens Q zu erzeugen.

e)	TI-83 PROGRAM:UEB43 :ClrHome :ClrDraw :ZSquare :Input "ANZAHL SEGMENTE N=",N :Input "NEIGUNG M=",M :If N ≥ 1 :Then :For (K,1,N,1) :Input "POX=", A :Input "POY=", B :Input "P1X=", C :Input "P1Y=", D :Input "P2X=", E :Input "P2Y=", F :Input "P3X=", G :Input "P3Y=", H :A+B*M → A :C+D*M → C :E+F*M → E :G+H*M → G : wie Übung 22 : :PtOn(S,U) :End :End :End	TI-89 :ueb43() :Prgm :ClrHome :ClrDraw :ZoomSqr :Input "Anzahl Segmente n=",n :Input "Neigung m=",m :If n ≥ 1 Then : For k,1,n,1 : Input "p0x=", p0x : Input "p0y=", p0y : Input "p1x=", p1x : Input "p1y=", p1y : Input "p2x=", p2x : Input "p2y=", p2y : Input "p3x=", p3x : Input "p3y=", p3y : p0x+p0y*m → p0x : p1x+p1y*m → p1x : p2x+p2y*m → p2x : p3x+p3y*m → p3x : wie Übung 22 : : PtOn s3x,s3y : EndFor ⓐt : EndFor ⓐk : EndIf : EndPrgm
f)	individuell	

44

Im Folgenden wird die Summenregel hergeleitet. Ähnliches gilt für die beiden Konstantenregeln.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) - (\vec{u}(t_0) + \vec{v}(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{u}(t) - \vec{u}(t_0)}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\vec{u}}(t_0) + \dot{\vec{v}}(t_0) \end{aligned}$$

45

a) Wegen der Summen- und der Konstantenregel brauchen nur die Bernsteinpolynome abgeleitet zu werden:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1-t)^3 \cdot \vec{r}_0 + 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 \cdot \vec{r}_1 + 3 \cdot t^2 \cdot (1-t) \cdot \vec{r}_2 + t^3 \cdot \vec{r}_3 \\ &= (1-t)^3 \cdot \vec{r}_0 + (3t - 6t^2 + 3t^3) \cdot \vec{r}_1 + (3t^2 - 3t^3) \cdot \vec{r}_2 + t^3 \cdot \vec{r}_3 \\ \dot{\vec{r}}(t) &= -3(1-t)^2 \cdot \vec{r}_0 + (3 - 12t + 9t^2) \cdot \vec{r}_1 + (6t - 9t^2) \cdot \vec{r}_2 + 3t^2 \cdot \vec{r}_3 \end{aligned}$$

- b) In P_0 ist $t = 0$, daher $\dot{\vec{r}}(0) = -3 \cdot \vec{r}_0 + 3 \cdot \vec{r}_1 = 3(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = 3\overrightarrow{P_0P_1}$
In P_3 ist $t = 1$, daher $\dot{\vec{r}}(1) = -3 \cdot \vec{r}_2 + 3 \cdot \vec{r}_3 = 3(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 3\overrightarrow{P_2P_3}$
- c) Die Tangente in P_0 verläuft parallel zur ersten Polygonseite P_0P_1 .
Die Tangente in P_3 verläuft parallel zur letzten Polygonseite P_2P_3 (vgl. Übung 9).

46

a) Die Bézierkurve 3. Ordnung hat die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}
 P(t) &= (1-t)^3 \cdot P_0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot P_1 + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot P_2 + t^3 P_3 \\
 \dot{P}(t) &= 3 \cdot [-(1-t)^2 \cdot P_0 + (1-t)(1-3t) \cdot P_1 + t(2-3t) \cdot P_2 + t^2 \cdot P_3] \\
 \dot{P}\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 \left[-\frac{1}{4}P_0 - \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 \right] \\
 &= \frac{3}{4}[(P_3 - P_0) + (P_2 - P_1)] = \frac{3}{4}[\overrightarrow{P_0P_3} + \overrightarrow{P_1P_2}]
 \end{aligned}$$

Hier wurde P_0 mit \vec{r}_{P_0} identifiziert, entsprechend ist $P_3 - P_0 = \vec{r}_{P_3} - \vec{r}_{P_0} = \overrightarrow{P_0P_3}$, usw.

b) Die Tangente ist parallel zur Grundseite des Trapezes (siehe Abb. 67).

c) Die Tangente ist parallel zu $\overrightarrow{P_0P_3} + \overrightarrow{P_1P_2}$ (siehe Abb. 67).

d) Es reicht, nur $P(\frac{1}{2})$ samt seiner Tangente $\overrightarrow{P_0P_3} + \overrightarrow{P_1P_2}$ zu konstruieren. Die Kurve zieht man dann – ausgehend vom Anfangspunkt P_0 – ein Stückchen entlang der Polygonseite P_0P_1 . Man fährt fort, den Mittelpunkt $P(\frac{1}{2})$ ins Auge fassend und dafür sorgend, dass man sich dem Mittelpunkt entlang der Tangente nähert. Dann nähert man sich dem Ziel P_3 , wieder entlang dessen Tangente, der letzten Polygonseite P_2P_3 (siehe Abb. 67).

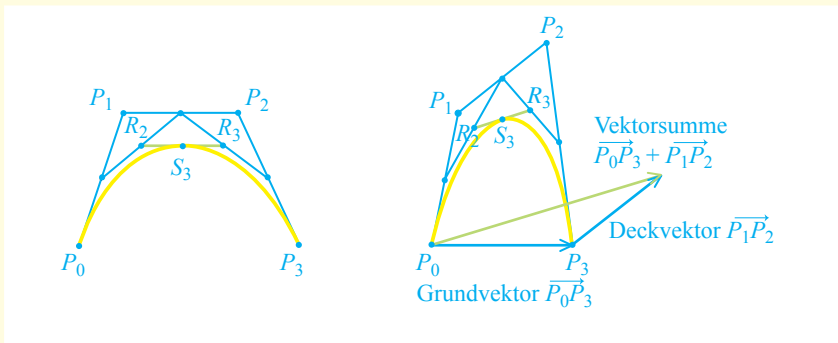


Abbildung 67
Mittentangente

47

$$\begin{aligned}
 P(t) &= (1-t)^3 \cdot P_0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot P_1 + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot P_2 + t^3 P_3 \\
 \dot{P}(t) &= 3 \cdot [-(1-t)^2 \cdot P_0 + (1-t)(1-3t) \cdot P_1 + t(2-3t) \cdot P_2 + t^2 \cdot P_3]
 \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{R_2R_3} &= R_3 - R_2 \\
 &= (1-t)Q_2 + tQ_3 - (1-t)Q_1 - tQ_2 \\
 &= -(1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + (1-2t)[(1-t)P_1 + tP_2] + t[(1-t)P_2 + tP_3] \\
 &= -(1-t)^2P_0 + (1-t)(1-3t)P_1 + t(2-3t)P_2 + t^2P_3 = \frac{1}{3} \cdot \dot{P}(t)
 \end{aligned}$$

48

- (i) (a) $P(t) = (1-t)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2$
 $\dot{P}(t) = -2 \cdot (1-t) \cdot P_0 + 2(1-2t) \cdot P_1 + 2t \cdot P_2$
- (b) $\dot{P}(0) = 2 \cdot [-P_0 + P_1] = 2 \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$
 $\dot{P}(1) = 2 \cdot [-P_1 + P_2] = 2 \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$
- (ii) (a) $P(t) = (1-t)^n P_0 + n(1-t)^{n-1}tP_1 + \dots + n(1-t)t^{n-1}P_{n-1} + t^n P_n$
 $\dot{P}(t) = -n(1-t)^{n-1}P_0 + n(1-nt)(1-t)^{n-2}P_1 + \dots$
 $\dots + n(n-1-nt)t^{n-2}P_{n-1} + nt^{n-1}P_n$

$$(b) \quad \begin{aligned} \dot{P}(0) &= n \cdot [-P_0 + P_1] = n \cdot \overrightarrow{P_0P_1} \\ \dot{P}(1) &= n \cdot [-P_{n-1} + P_n] = n \cdot \overrightarrow{P_{n-1}P_n} \end{aligned}$$

49

- a) Man legt die x -Achse durch P_0 und P_2 , dann ist $y_0 = 0$, $y_2 = 0$ und für den Hochpunkt der Kurve ist $\dot{y}(t) = 0$.

$$\begin{aligned} y(t) &= (1-t)^2 \cdot y_0 + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot y_1 + t^2 \cdot y_2 = 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot y_1 \\ \dot{y}(t) &= 2 \cdot (1-2t) \cdot y_1 = 0 \quad \text{für } t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also ist der Kurvenmittelpunkt zugleich Hochpunkt der Bézierkurve 2. Ordnung.

- b) Die Kontrollpunkte P_0 und P_3 sollen wieder auf der x -Achse liegen. Im Trapez liegen die Kontrollpunkte P_1 und P_2 auf gleicher Höhe $h = y_1 = y_2$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} y(t) &= (1-t)^3 \cdot y_0 + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot y_1 + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot y_2 + t^3 \cdot y_3 \\ &= 0 + 3 \cdot (t-2t^2+t^3) \cdot h + 3 \cdot (t^2-t^3) \cdot h + 0 \\ \dot{y}(t) &= 3h \cdot (1-4t+3t^2+2t-3t^2) = 3h \cdot (1-2t) = 0 \quad \text{für } t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wieder ist der parametrische Mittelpunkt zugleich Hochpunkt der Bézierkurve 3. Ordnung.

50

- a) Die Koordinaten der Bézierkurve sind

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1-t)^3(-1) + 3(1-t)^2ta + 3(1-t)t^2(-a) + t^31 \\ (1-t)^30 + 3(1-t)^2tb + 3(1-t)t^2b + t^30 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t-\frac{1}{2})[(2+6a)t^2 - (2+6a)t + 2] \\ 3bt \cdot (1-t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im Überschneidungspunkt ist aus Symmetriegründen $x(t) = 0$. Neben der Lösung $t_1 = \frac{1}{2}$ gibt es noch weitere Lösungen, wenn die Diskriminante des quadratischen Faktors positiv ist, d. h., wenn $(2+6a) \cdot (6a-6) > 0$, also $a < -\frac{1}{3}$ oder $a > 1$ ist. Da a positiv sein soll, gibt es nur für $a > 1$ Überschneidungspunkte.

- b) Die Gleichung $x(t) = 0$ führt zu

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2} & P(t_1) &= \left(0 \mid \frac{3b}{4}\right) \\ t_{2,3} &= \frac{(1+3a) \pm \sqrt{(1+3a)(3a-3)}}{2 \cdot (1+3a)} & P(t_{2,3}) &= \left(0 \mid \frac{3b}{3a+1}\right) \end{aligned}$$

Der Punkt $P(t_2) = P(t_3)$ ist für jedes $a > 1$ Überschneidungspunkt der Bézierkurve.

- c) Wegen a) und b) gibt es eine Schlinge, nur wenn $a > 1$ ist, also wenn $\overrightarrow{P_1P_2} > \overrightarrow{P_0P_3}$ (siehe Abb. 68).

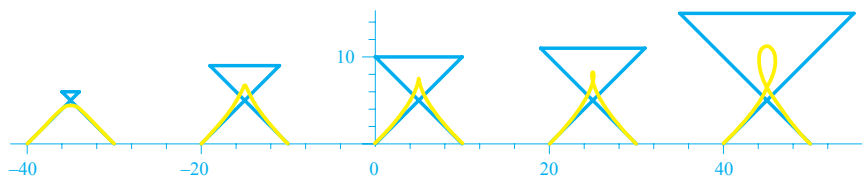


Abbildung 68
Verschlungene Bézierkurve

51

Das erste Béziersegment $\vec{r}(t)$ werde durch die Kontrollpunkte P_0, P_1, P_2, P_3 erzeugt, das zweite Béziersegment $\vec{s}(t)$ durch die Kontrollpunkte K_0, K_1, K_2, K_3 . Damit die Segmente nahtlos ineinander übergehen, muss $\vec{r}(1) = \vec{s}(0)$ sein, also $P_3 = K_0$ (Stetigkeit 0. Grades).
Damit beim Übergang keine Knicke entstehen, muss $\dot{\vec{r}}(1) = \dot{\vec{s}}(0)$ gelten, also $\overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{K_0K_1}$ (Stetigkeit 1. Grades).
Also liegen $P_2, P_3 = K_0, K_1$ auf einer Geraden, und $P_3 = K_0$ ist die Mitte der Strecke $\overline{P_2K_1}$.

52

a) Leitet man das Resultat aus Übung 48 nochmals ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{P}(t) &= n(n-1)(1-t)^{n-2}P_0 \\ &\quad + n(n-1)(-2+nt)(1-t)^{n-3}P_1 \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2}((n-2)(n-3)t^2 - 4(n-2)(1-t)t + 2(1-t)^2)(1-t)^{n-4}P_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2}((n-2)(n-3)(1-t)^2 - 4(n-2)t(1-t) + 2t^2)t^{n-4}P_{n-2} \\ &\quad + n(n-1)(n-2-nt)t^{n-3}P_{n-1} \\ &\quad + n(n-1)t^{n-2}P_n \end{aligned}$$

b) $\ddot{P}(0) = n(n-1) \cdot [P_0 - 2P_1 + P_2] = n(n-1) \cdot (\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2})$

$$\ddot{P}(1) = n(n-1) \cdot [P_{n-2} - 2P_{n-1} + P_n] = n(n-1) \cdot (\overrightarrow{P_{n-1}P_{n-2}} + \overrightarrow{P_{n-1}P_n})$$

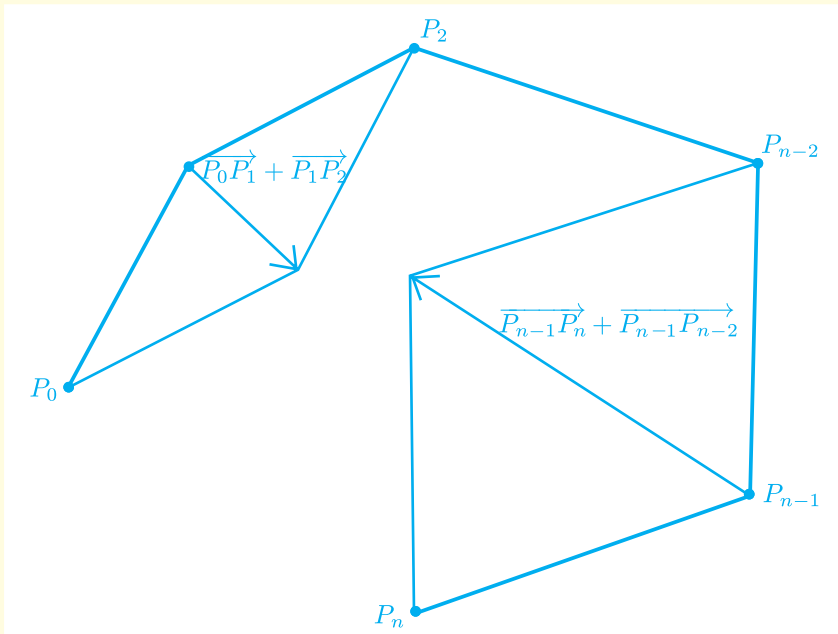


Abbildung 69
Zur zweiten Ableitung in den Endpunkten der Bézierkurve

53

a) Für $n = 2$ in (6) erhält man $\ddot{r}(0) = 2 \cdot (\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2})$ und $\ddot{r}(1) = 2 \cdot (\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2})$.

b) Die zweite Ableitung der Gleichung für die Bézierkurve ist konstant, denn

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (1-t)^2\vec{r}_0 + 2(1-t)t\vec{r}_1 + t^2\vec{r}_2 \\ \dot{\vec{r}}(t) &= -2(1-t)\vec{r}_0 + 2(1-2t)\vec{r}_1 + 2t\vec{r}_2 \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= 2\vec{r}_0 - 4\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 = 2(\vec{r}_0 - 2\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = 2(\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2}) \end{aligned}$$

Die durch die 15 Kontrollpunkte erzeugte Bézierkurve

$$\vec{r}_H = \sum_{i=0}^{14} \binom{14}{i} t^i \cdot (1-t)^{14-i} \cdot \vec{r}_i$$

beschreibt die Spur des Hinterrades. Rückt man von der momentanen Position des Hinterrades in Richtung der Tangente v Einheiten vor, so erhält man die Position des Vorderrades:

$$\vec{r}_V = \vec{r}_H + v \cdot \frac{\dot{\vec{r}}_H}{|\dot{\vec{r}}_H|}$$

Hier ist $|\dot{\vec{r}}_H|$ die Länge des Vektors $\dot{\vec{r}}_H$, somit $\frac{\dot{\vec{r}}_H}{|\dot{\vec{r}}_H|}$ der Einheitsvektor in Richtung der Tangente.

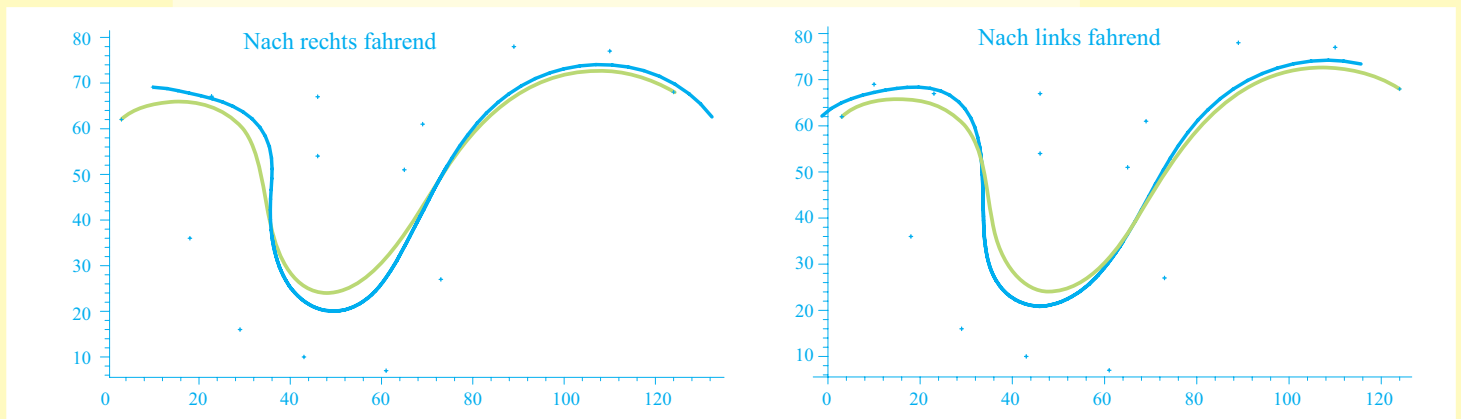


Abbildung 72
Das linke Bild, nach rechts fahrend, entspricht der Velospur von Abbildung 42

56

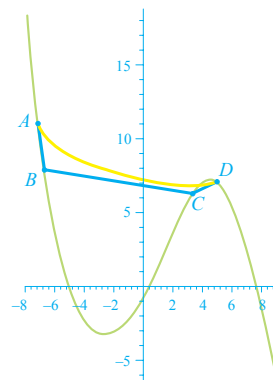


Abbildung 73
Polynomfunktion und Bézierkurve durch die Punkte A, B, C, D

- a) Abbildung 73 zeigt unter anderem die Punkte A, B, C, D.
 b) Die einfachste Polynomfunktion, welche die vier Punkte enthält, ist von der Form $y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$. Setzt man die Koordinaten der 4 Punkte A, B, C, D ein, so entsteht ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen für 4 Unbekannte a, b, c, d . Die Lösung ergibt, auf 3 Dezimalstellen gerundet,

$$y \approx -0.057 \cdot x^3 + 0.151 \cdot x^2 + 2.286 \cdot x - 0.924$$

Der Graph ist in Abbildung 73 grün eingetragen.

Die Kurve schlägt zwischen den Punkten B und C stark nach unten aus.

- c) Die zu A, B, C, D gehörende Bézierkurve ist in Abbildung 73 gelb gezeichnet. Sie benimmt sich eher wie erwartet.

57

- a) Nullstellen sind $P_0(-1|0)$ und $P_3(1|0)$. Ansatz für die Parabel ist $y = a(x^2 - 1)$. $P_2(0 | -\sqrt{3})$ einsetzen ergibt $y = \sqrt{3}(x^2 - 1)$, eine Parabel mit Öffnung $\sqrt{3}$.
- b) Ansatz ist $y = ax^2 + bx + c$.
Die Punkte $P_0(0|\sqrt{2})$, $P_1(\sqrt{2}|0)$ und $P_2(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2})$ eingesetzt, ergibt ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten a, b, c . Die Lösung ergibt $y = \sqrt{6}x^2 - (\sqrt{12} + 1)x + \sqrt{2}$, eine Parabel mit Öffnung $\sqrt{6}$, anders als in a).

58

- a) Siehe linke Bilder in Abbildung 74.
- b) Nach Gleichung (9) lautet die Parameterdarstellung des Teppichs

$$\vec{r}(s, t) = \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^3 B_k^3(s) \cdot B_i^3(t) \cdot \vec{r}_{ki}$$

wobei P_{ki} die gegebenen Kontrollpunkte, $B_k^3(s)$ und $B_i^3(t)$ die Bernsteinpolynome der 3. Ordnung sind.

- c)

```
> with(plots):
> with(linalg):
> P00:=[75, 0, 85]:P01:=[73, 28, 85]:P02:=[66, 43, 85]:P03:=[51, 47, 85]:
> P10:=[63, 06, 60]:P11:=[58, 30, 60]:P12:=[56, 48, 60]:P13:=[47, 56, 60]:
> P20:=[71, 21, 25]:P21:=[62, 32, 25]:P22:=[46, 35, 25]:P23:=[37, 41, 25]:
> P30:=[73, 0, 0]:P31:=[60, 20, 0]:P32:=[49, 37, 0]:P33:=[43, 55, 0]:
> B0:=u->(1-u)^3:
> B1:=u->3*u*(1-u)^2:
> B2:=u->3*u^2*(1-u):
> B3:=u->u^3:
> x0:=(v)->B0(v)*P00[1]+B1(v)*P01[1]+B2(v)*P02[1]+B3(v)*P03[1]:
> x1:=(v)->B0(v)*P10[1]+B1(v)*P11[1]+B2(v)*P12[1]+B3(v)*P13[1]:
> x2:=(v)->B0(v)*P20[1]+B1(v)*P21[1]+B2(v)*P22[1]+B3(v)*P23[1]:
> x3:=(v)->B0(v)*P30[1]+B1(v)*P31[1]+B2(v)*P32[1]+B3(v)*P33[1]:
> y0:=(v)->B0(v)*P00[2]+B1(v)*P01[2]+B2(v)*P02[2]+B3(v)*P03[2]:
> y1:=(v)->B0(v)*P10[2]+B1(v)*P11[2]+B2(v)*P12[2]+B3(v)*P13[2]:
> y2:=(v)->B0(v)*P20[2]+B1(v)*P21[2]+B2(v)*P22[2]+B3(v)*P23[2]:
> y3:=(v)->B0(v)*P30[2]+B1(v)*P31[2]+B2(v)*P32[2]+B3(v)*P33[2]:
> z0:=(v)->B0(v)*P00[3]+B1(v)*P01[3]+B2(v)*P02[3]+B3(v)*P03[3]:
> z1:=(v)->B0(v)*P10[3]+B1(v)*P11[3]+B2(v)*P12[3]+B3(v)*P13[3]:
> z2:=(v)->B0(v)*P20[3]+B1(v)*P21[3]+B2(v)*P22[3]+B3(v)*P23[3]:
> z3:=(v)->B0(v)*P30[3]+B1(v)*P31[3]+B2(v)*P32[3]+B3(v)*P33[3]:
> x:=(u,v)->B0(u)*x0(v)+B1(u)*x1(v)+B2(u)*x2(v)+B3(u)*x3(v):
> y:=(u,v)->B0(u)*y0(v)+B1(u)*y1(v)+B2(u)*y2(v)+B3(u)*y3(v):
> z:=(u,v)->B0(u)*z0(v)+B1(u)*z1(v)+B2(u)*z2(v)+B3(u)*z3(v):
> Tabelle:=[
[[P00[1],P00[2],P00[3]], [P01[1],P01[2],P01[3]], [P02[1],P02[2],P02[3]],
[P03[1],P03[2],P03[3]]],
[[P10[1],P10[2],P10[3]], [P11[1],P11[2],P11[3]], [P12[1],P12[2],P12[3]],
[P13[1],P13[2],P13[3]]],
[[P20[1],P20[2],P20[3]], [P21[1],P21[2],P21[3]], [P22[1],P22[2],P22[3]],
[P23[1],P23[2],P23[3]]],
[[P30[1],P30[2],P30[3]], [P31[1],P31[2],P31[3]], [P32[1],P32[2],P32[3]],
[P33[1],P33[2],P33[3]]]]:
> PLOT3D(MESH( Tabelle ), AXESLABELS(x,y,z),
ORIENTATION(45,45),SCALING(CONSTRAINED));
> plot3d([x(u,v),y(u,v),z(u,v)],u=0..1,v=0..1,
scaling=CONSTRAINED,axes=BOXED);
```

Abbildung 74 zeigt links das Kontrollnetz und rechts den durch die zugehörige Bézierfläche erzeugten Teppich, oben für das Kontrollnetz (i), unten für das Kontrollnetz (ii). Einmal wirkt der Teppich mutig, einmal zaghaft.

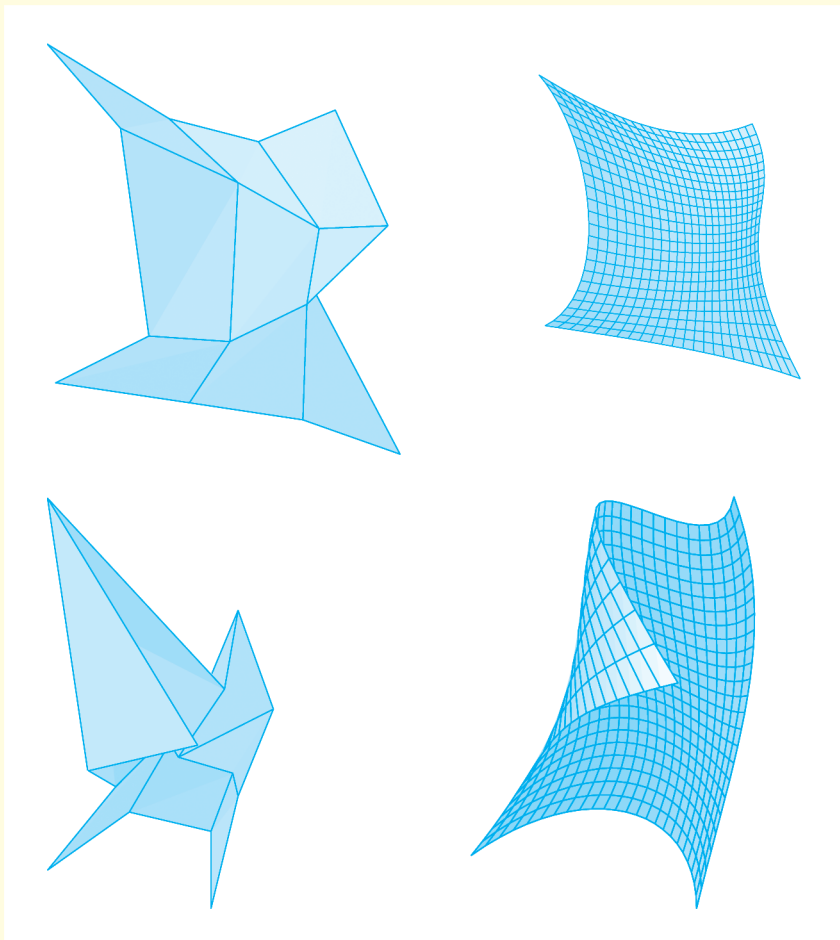
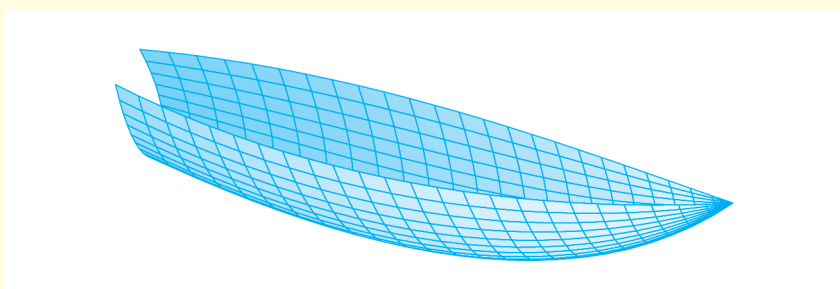


Abbildung 74
Kontrollnetze und Bézierflächen zu Aladdins Teppich

59

- a) In Abbildung 75 wurde dasselbe *Maple*-Programm wie für den Teppich gebraucht, ausser dass für das Kontrollnetz folgende Zahlen verwendet wurden:
- ```
> P00:=[1, 0, 5]:P01:=[2, 0,-2]:P02:=[-2, 0,-2]:P03:=[-1, 0, 5]:
> P10:=[3,10, 5]:P11:=[2,10,-5]:P12:=[-2,10,-5]:P13:=[-3,10, 5]:
> P20:=[2,20, 5]:P21:=[2,20,-5]:P22:=[-2,20,-5]:P23:=[-2,20, 5]:
> P30:=[0,30, 7]:P31:=[0,30, 7]:P32:=[0,30, 7]:P33:=[0,30, 7]:
```



**Abbildung 75**  
Bézierfläche einer Bootsschale

## Literatur

- Bartels, R. H.; Beatty, J. C.; Barsky, B. A.: An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Modeling. Morgan Kaufmann Publishers, Inc. Los Altos, California, 1987.
- Bézier, Pierre: Courbes et Surfaces, Mathématiques et CAO. Vol. 4, 2<sup>e</sup> édition. Hermès, Paris, 1987.
- de Casteljalou, Paul de Faget: Formes à pôles, Mathématiques et CAO. Vol. 2. Hermès Publishing, 1985.
- Chang, Gangzhe; Sederberg, Thomas: Over and Over Again. Mathematical Association of America. New Mathematical Library, vol. 39, 1997.
- Dreiseidler; Grabinger; Kokol-Voljic; Kutzler; Noll; Pröpper, Scheu, Scheuermann; Weitendorf: Einführung in den Voyage 200. Hagenberg (Austria). bk-teachware, 2002.
- Farin, Gerald: Curves and surfaces for computer aided geometric design – a practical guide. Academic Press. San Diego, 1993.
- Kleinfeld, Achim: Geometrisches Modellieren mit Bézierkurven verbindet anwendungsbezogenen Analysis, Lineare Algebra und Algorithmik. ISTRON-Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildesheim. Band 6 (2000), S. 61–79.
- Meyer, Jörg: Bézierkurven. ISTRON-Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildesheim. Band 6 (2000), S. 44–60.
- Wagon, Stan: Mathematica in Action. 2<sup>nd</sup> ed. Springer. New York, 1999.

## Einige Websites

- <http://www.protomap.cs.huji.ac.il/~arik/java/ex2/index.html>  
(Dezember 1999)
- <http://www.fmi.uni-passau.de/~weitl/>  
(Dezember 1999)
- Mark Hoefler: Bezier Curve Demo (mit Java Source Code)  
<http://www.math.ucla.edu/~baker/java/hoefler/Bezier.htm>  
(Oktober 2002)
- Interactive Bezier Splines, a Java program  
<http://www.sunsite.ubc.ca/LivingMathematics/V001N01/UBCEXamples/Bezier/bezier.html>  
(Oktober 2002)
- Joy Ken, 1997, <http://graphics.cs.ucdavis.edu/CAGNotes/>  
(On-Line Vorlesungsskript über Geometrische Modellierung.)
- Kirsanov Dmitry, 1999, <http://www.webreference.com/dlab/9902/bezier.html>  
(Bézierkurven vom künstlerischen Standpunkt aus betrachtet.)

## Bild- und Quellennachweis

- Abb. 1: Aloys F. Dornbracht GmbH & Co., Iserlohn/Germany
- Abb. 4: nach Kirsanov Dmitry, [www.webreference.com/dlab/9902/bezier.html](http://www.webreference.com/dlab/9902/bezier.html)
- Abb. 5: Helm Wotzkow: The Art of Hand-Lettering, Dover Publications, New York, 1967
- Abb. 43: Greenhill, Basil: The evolution of the wooden ship, ill. by Sam Manning, London Batsford, 1988
- Abb. 47: Werbung von Lancôme, USA
- Abb. 48: Aus [www.pixar.com](http://www.pixar.com)
- S.40: Text zu Nike-Logo aus [http://xroads.virginia.edu/~CLASS/am483\\_97/projects/hincker/nikhist.html](http://xroads.virginia.edu/~CLASS/am483_97/projects/hincker/nikhist.html)

## Index

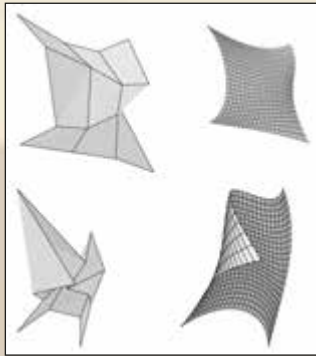
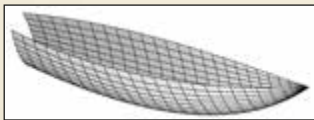
- Ableitung 48, 49, 51
- Aladdins Teppich 59
- Algorithmus 16
- Animation 34
- Ankerpunkte 16
- Applets 34
- approximieren 56
  
- Bézier 8, 41
- Bernsteinpolynom 39, 40
- Bézierfläche 3. Ordnung, Parameterdarstellung der 59
- Bézierkurve 2. Ordnung 14
- Bézierkurve 3. Ordnung 15
- Bildschirm 28
- Binomialkoeffizienten 39
- Bootsschale 60
- Buchstabe Q 44
- Buchstabe R 11
  
- Cabri Géomètre 34
  
- Datenkompression 16
- de Casteljaou 8, 13, 16
- Drahtspannbild 13
- duplizieren 36
- dynamisches Geometriesystem 34
  
- Ebene, Parameterdarstellung der 57
- Eckenabschneiden 13, 15
- Erbse 33
  
- Führungspunkt 16
- Fadenspannbild 17
- Feldsessel 33, 50
  
- Geometriesystem, dynamisches 34
- geradlinig 36
- geschlossen 33, 36
- gewichtetes Mittel 38
- Graderhöhung 36, 42, 47
- Grafiksoftware 20
- Griff 20
  
- Hochpunkt 50
- Hülle, konvexe 36
  
- Interpolation 55
- Interpolationskurve 54
- interpolieren 56
  
- Jongleur 28, 50
  
- knickfrei 51, 53
- Kontrollpolygon 19
- Kontrollpunkte 14, 16, 19, 21
  
- konvex 32
- konvexe Hülle 32, 36
- Koordinatentransformation 45
- Krümmung 10
- Kurvenanpassung 54
- Kurvenmittelpunkt 18
  
- lineare Kombination 27
  
- Matrix 29
- Mittel, gewichtetes 38
  
- Nike 42, 48
  
- Ortsvektor 38
  
- Parameter 14
- Parameterdarstellung der Bézierfläche 3. Ordnung 59
- Parameterdarstellung der Ebene 57
- Parameterdarstellung der Bézierkurve 37
- parametrischer Mittelpunkt 18
- Polygonzug 26
- Positivität 40
  
- Reproduzierbarkeit 16
- ruckfrei 51, 53
  
- Scherung 45
- Schriftart 11, 44, 46
- Schriftschnitt 44, 46
- Segment 30
- Sherlock Holmes 52
- spline 54
- sprungfrei 53
- Stetigkeit 0. Grades 53
- Stetigkeit 1. Grades 51, 53
- Stetigkeit 2. Grades 51, 53
- Steuern 22
- Straklatte 54
- Symmetrie 40
- symmetrisch 33, 36
  
- Tangente 19, 21, 48–50
- Teilungspunkt 26
- Tropfen 33
  
- Umformen 20
- Umformzeiger 20
- Umhüllende 28
  
- variationsvermindernd 24
- verschlungen 33, 36, 50
  
- Zerlegung der Eins 40, 56





Bézierflächen sind mathematisch erzeugte Formen. Anders als Kugeln, Kegel und Prismen erlauben sie das Gestalten weicher, fließender Formen, insbesondere das Nachahmen von Hand gezeichneter Kurven und Flächen.

Ursprünglich in der Autoindustrie von Ingenieuren entwickelt, wird dieser Algorithmus zur Erzeugung der von Hand konzipierten Kurven in praktisch allen Gebieten des Designs angewendet: von der computergesteuerten Herstellung eines Schiffsrumpfes über die Erzeugung eines Computerfonts bis hin zur Darstellung makelloser Blütenblätter in der Werbung.



**DMK-Themenhefte** sind Begleitmaterialien für den Mathematikunterricht. Sie erlauben die Behandlung eines mathematischen Themas an neuartigen Problemstellungen und liefern Zusatzinformationen für Interessierte.

«Bézierkurven: gezeichnet und gerechnet» führt in ein Stoffgebiet ein, das Schülerinnen und Schüler mit technischen oder künstlerischen Neigungen gleichermaßen anspricht. Das Heft ist übersichtlich strukturiert und ansprechend gestaltet; alle 59 Übungen sind im Unterricht getestet. Die Lösungen der Übungen finden sich am Schluss des Heftes.

**Die Autorin** studierte Mathematik an der ETH Zürich und promovierte an der University of California, Berkeley.

Seit 1982 unterrichtet sie Mathematik an der Kantonsschule Wettingen.

### Inhalt

- 1 Einführung: Design und Kurven
- 2 Geometrischer Zugang: Die Konstruktion
- 3 Analytischer Zugang: Die Parameterdarstellung
- 4 Bézierflächen