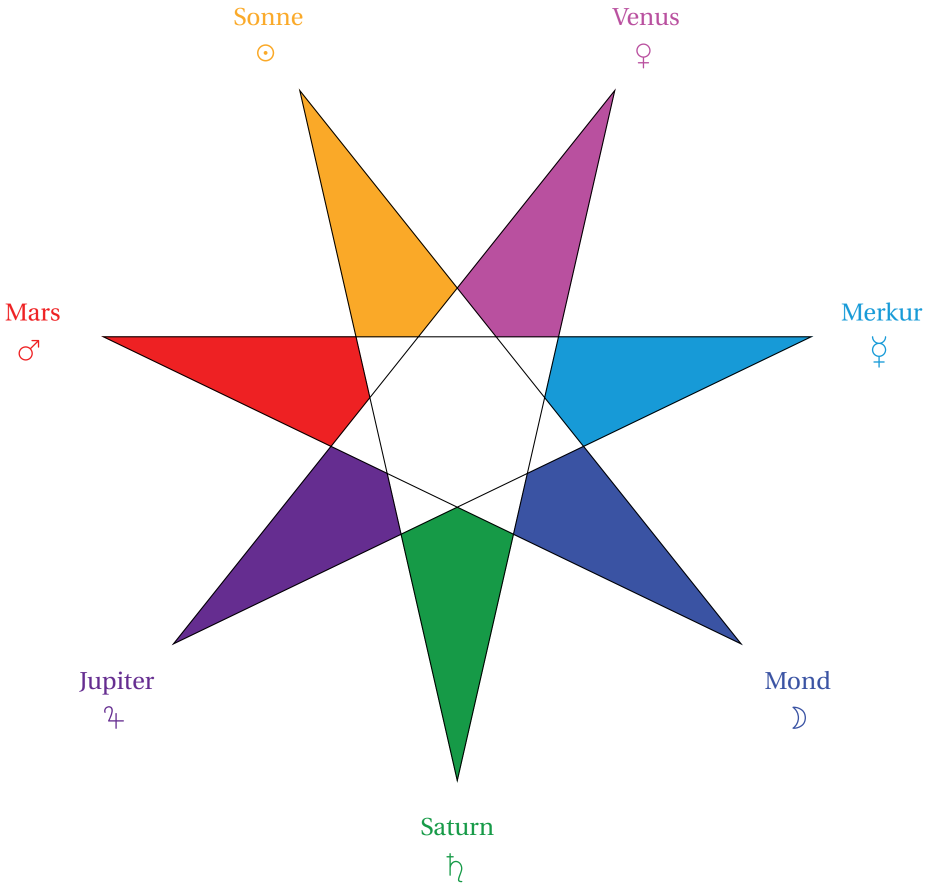
Sonne
☉
Venus
♀
Mars
♂
Merkur
☿
Jupiter
♃
Mond
☽
Saturn
♄

Lösungen

1 Aufgaben zum Sonntag

→ Abschnitt 1.2, Bild 1.5

Aufgabe 1.1

Erklären Sie, wieso der lichte Tag (von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang) und die Nacht gleich lang sind, wenn die Sonne den Frühlingspunkt oder den Herbstpunkt durchläuft.

Lösung 1.1

Wenn die Sonne den Frühlings- oder Herbstpunkt durchläuft, verläuft ihre tägliche Bahn auf der Himmelskugel längs des Himmelsäquators. Dieser wird durch die Horizontebene genau halbiert *(→ Bild 1.5)*. Da die Rotationsgeschwindigkeit der Himmelskugel um die Weltachse bzw. diejenige der Erde um ihre Achse als konstant angenommen werden darf, sind somit der lichte Tag und die Nacht gleich lang.

→ Abschnitt 1.3, Bild 1.11

Aufgabe 1.2

Von der Sonne aus gesehen legt die Erde auf ihrer Bahn in 90 Sterntagen den Winkel Λ zurück. In 90 mittleren Sonnentagen beträgt der zurückgelegte Winkel $\Lambda+\delta\Lambda$. Skizzieren Sie die Situation und berechnen Sie Λ und $\delta\Lambda$ (Angabe in Grad, Bogenminuten und Bogensekunden).

Lösung 1.2

Es gilt:

$$\frac{\Lambda}{360^\circ} \approx \frac{90}{366.25636}$$

und

$$\frac{\Lambda+\delta\Lambda}{360^\circ} \approx \frac{90}{365.25636}$$

Daraus folgt:

$$\Lambda \approx \frac{90}{366.25636} \cdot 360^\circ \approx 88^\circ\, 27'\, 45.5''$$

und

$$\Lambda+\delta\Lambda \approx \frac{30}{365.25636} \cdot 360^\circ \approx 88^\circ\, 42'\, 17.4''$$

und

$$\delta\Lambda \approx 14'31.9''$$

Aufgabe 1.3

→ Abschnitt 1.4, Internet-Recherche

Zur Zeit Karls des Grossen (747–814) wurden die vom römischen Kalender geerbten lateinischen Monatsnamen durch fränkische (althochdeutsche) Namen ersetzt. Die Übertragung in die moderne deutsche Sprache erfolgte in mehreren Schritten, begonnen vermutlich im 18. Jahrhundert.

a. Ordnen Sie den nachstehenden fränkischen Monatsnamen die uns geläufigen Monatsnamen (Januar, Februar, März, usw.) zu: Aranmanoth, Brachmanoth, Heilagmanoth, Herbistmanoth, Hewimanoth, Hornung, Lentzinmanoth, Ostarmanoth, Windumemanoth, Winnemanoth, Wintarmanoth, Witumanoth.
b. Ordnen Sie den nachstehenden neuhochdeutschen Monatsnamen die uns geläufigen Namen zu: Brachmond, Erntemond, Hartmond, Heilmond, Herbstmond, Heumond, Lenzmond, Nebelmond, Ostermond, Siegmond, Weihemond, Wonnemond.

Lösung 1.3

a. Aranmanoth = August, Brachmanoth = Juni, Heilagmanoth = Dezember, Herbistmanoth = November, Hewimanoth = Juli, Hornung = Februar, Lentzinmanoth = März, Ostarmanoth = April, Windumemanoth = Oktober, Winnemanoth= Mai, Wintarmanoth = Januar, Witumanoth = September.
b. Brachmond = Juni, Erntemond = August, Hartmond = Januar, Heilmond = Oktober, Herbstmond = September, Heumond = Juli, Lenzmond = März, Nebelmond = November, Ostermond = April, Siegmond = Februar, Weihemond = Dezember, Wonnemond = Mai

Aufgabe 1.4

→ Abschnitt 1.4

Wie erwähnt, wurde die Schaltung im Julianischen Kalender nach Julius Cäsars Tod (44 v. Chr.) zu oft vorgenommen. Die für die kalendarische Zeitordnung zuständigen *Pontifices* missverstanden Cäsars Schaltanweisung als **Inklusivzählung**[1] und fügten deshalb von Anfang an (Epoche 45 v. Chr.) in jedem dritten Jahr, beginnend mit 45 v. Chr., einen Schalttag ein. Wir wissen ferner, dass im Jahr 9 v. Chr.

1 Man zählt die Einheiten eines Zeitzyklus so, dass die erste Einheit des nachfolgenden Zyklus mitgezählt wird.

vor der Kalenderkorrektur zum letzten Mal geschaltet wurde und dass Augustus in den drei Jahren 5 v. Chr., 1 v. Chr. und 4 n. Chr. den Schalttag ausfallen liess. Geben Sie die Antworten auf die folgenden Fragen als Jahreszahlen in der Christlichen und in der Varronischen Ära (→ *Unterabschnitt 1.4.3)* an.

a. Geben Sie alle Jahre vor 9 v. Chr. an, welche nach Cäsars Anweisung Schaltjahre gewesen wären? Wie oft hätte bis und mit 9 v. Chr. geschaltet werden müssen?
b. Geben Sie alle Jahre vor 9 v. Chr. an, in denen tatsächlich geschaltet wurde. Wie oft wurde bis und mit 9 v. Chr. tatsächlich geschaltet?

Lösung 1.4

a. Im Jahr 45 v. Chr. = 709 (Varronisch) wurde der Julianische Kalender eingesetzt. Das Jahr 45 v. Chr. war ein Schaltjahr; also war auch das Jahr 9 v. Chr. ein von Cäsar vorgesehenes Schaltjahr ($45-9=36$ ist durch 4 teilbar). Als Schaltjahre vorgesehen waren weiter: 41 v. Chr. = 713 (V), 37 v. Chr. = 717, 33 v. Chr. = 721, 29 v. Chr. = 725, 25 v. Chr. = 729, 21 v. Chr. = 733, 17 v. Chr. = 737, 13 v. Chr. = 741, 9 v. Chr. = 745 (V). Bis und mit 9 v. Chr. waren 10 Schaltungen vorgesehen.
b. Tatsächlich geschaltet wurde in den Jahren 45 v. Chr. = 709 (V), 42 v. Chr. = 712 (V), 39 v. Chr. = 715, 36 v. Chr. = 718, 33 v. Chr. = 721, 30 v. Chr. = 724, 27 v. Chr. = 727, 24 v. Chr. = 730, 21 v. Chr. = 733, 18 v. Chr. = 736, 15 v. Chr. = 739, 12 v. Chr. = 742 und 9 v. Chr. = 745. Es fanden tatsächlich 13 Schaltungen statt.

→ Abschnitt 1.4

Aufgabe 1.5

Moderne Berechnungen ergeben, dass das tropische Jahr in der Antike etwas länger war als heute. Für die Differenz zwischen der Länge des tropischen Jahres und derjenigen des altägyptischen Sonnenjahres von 365 Tagen verwenden wir im Folgenden den Wert 0.242514 d. (Gerechnet nach Heydari [Hey06].)

a. In wie vielen ägyptischen Jahren, Monaten und Tagen summiert sich diese Differenz zu einem Tag?
b. Zu wie vielen Tagen summierte sich die Differenz in einem Leben von 70 ägyptischen Jahren?
c. Wie viele ägyptische Jahre dauerte es, bis sie sich zu einem ganzen ägyptischen Jahr summiert hatte?

Lösung 1.5

a. $\frac{1}{0.242514}$ Jahre ≈ 4.12347 Jahre = 4 Jahre 1 Monat 15 Tage

b. $\frac{70}{4.12347}$ Tage ≈ 17 Tage

c. $\frac{365}{0.242514}$ Jahre ≈ 1505 Jahre

Aufgabe 1.6

→ Vertiefung 1.5.1, Formeln 1.11, 1.12

Berechnen Sie für die in der ersten Spalte der Tabelle 1.1 angegebenen Orte in Mitteleuropa die extremalen oberen Kulminationshöhen der Sonnenbahn.

Lösung 1.6

Die extremalen oberen Kulminationshöhen werden bei Sommer- bzw. Wintersonnenwende erreicht.

Ort	Geographische Breite	Maximale obere Kulminationshöhe	Minimale obere Kulminationshöhe
Berlin	$52°31'$N	$60°55'$	$14°03'$
Frankfurt	$50°07'$N	$63°19'$	$16°27'$
Genf	$46°12'$N	$67°14'$	$20°22'$
Lugano	$46°00'$N	$67°26'$	$20°34'$
München	$48°08'$N	$65°18'$	$18°26'$
Paris	$48°51'$N	$64°35'$	$15°43'$
Rom	$41°54'$N	$71°32'$	$24°40'$
Stockholm	$59°20'$N	$54°06'$	$07°14'$
Wien	$48°12'$N	$65°14'$	$18°22'$
Zürich	$47°22'$N	$66°04'$	$19°12'$

Tabelle 1.1
Extremale obere Kulminationshöhen in Mitteleuropa

Aufgabe 1.7

→ Vertiefung 1.5.1, Bild 1.17

a. Bestimmen Sie die Kulminationshöhe η_O der Sonne am 21. Mai ($\delta_\odot = 20°\,18'$) in Hamburg ($\varphi = 53°\,36'$).

b. Ermitteln Sie die geographische Breite φ des Beobachtungsortes aus der Kulminationshöhe $\eta_O = 67°\,18'$ des Fixsterns Aldebaran ($\delta = 16°31'$).

c. Berechnen Sie die Deklination δ des Sirius aus seiner Kulminationshöhe $\eta_O = 25°\,47'$ am Beobachtungsort mit Breite $\varphi = 47°\,30'$.

Lösung 1.7

a. $\eta_O = 90° - \varphi + \delta_\odot = 56°42'$.

b. $\varphi = 90° + \delta - \eta_O = 39°13'$.

c. $\delta = \eta_O + \varphi - 90° = -16°43'$.

→ Vertiefung 1.5.1, Bild 1.17

Aufgabe 1.8

a. Welche Deklination muss ein Stern mindestens besitzen, wenn er in Zürich ($\varphi = 47°\,22'$) zirkumpolar sein soll?

b. In welchen Breiten ist der Stern Deneb ($\delta = 45°\,18'$) zirkumpolar?

Lösung 1.8

a. Lösung: Die Bedingung für Zirkumpolarität ist $\delta \geq 90° - \varphi$ Somit: $\delta \geq 42°38'$.

b. Lösung: $\varphi \geq 90° - \delta = 44°42'$.

→ Bilder 1.19, 1.20, Vertiefung 1.5.2

Aufgabe 1.9

Im Gegensatz zu den Fixsternen, deren Deklination praktisch konstant ist, variiert die Sonnendeklination $\delta_\odot$ von Tag zu Tag.

a. Zeichnen Sie in der Projektion auf die Meridianebene *(→ Bild 1.20)* die Zone der variablen täglichen Sonnenbahn auf der Himmelskugel für Standorte mit geographischer Breite $\varphi = 30°$ und $\varphi = 60°$ (2 Zeichnungen).

b. Bestimmen Sie für die höchste und die tiefste Sonnenbahn je die Morgenweite und den Tagbogen. Wie lange dauert es an den entsprechenden Tagen von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang?

Lösung 1.9

Polhöhe = Geographische Breite

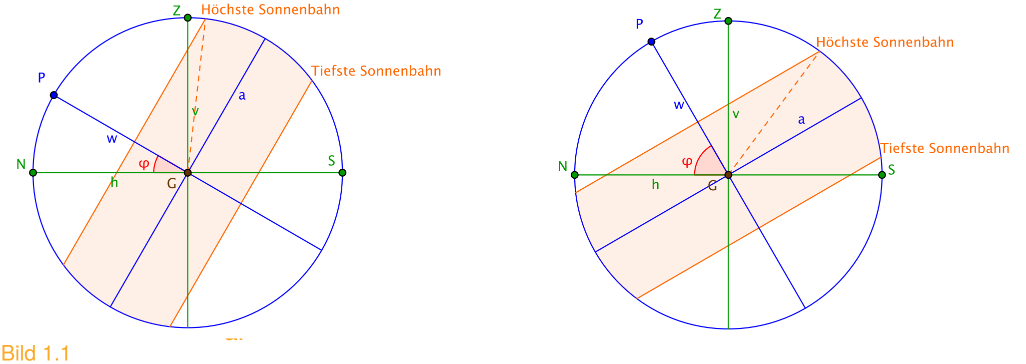

Bild 1.1
Links $\varphi = 30°$, rechts $\varphi = 60°$

b. ■ Bei $\varphi = 30°$ und höchstem Sonnenstand $\delta = 23°\,26'\,21''$ gilt:

$\sin\omega = \frac{\sin(23°26'21'')}{\cos(30°)}$ (Formel 1.14), also Morgenweite $\omega \approx 27°\,21'$

$\cos\left(\frac{\tau}{2}\right) = -\tan(23°\,26'\,21'')\cdot\tan(30°)$ (Formel 1.15)

also Tagbogen $\tau \approx 208°\,59'$; von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang dauert es $\tau/360\cdot 24\,\text{h} \approx 13\,\text{h}\,56\,\text{m}$

■ bei $\varphi = 30°$ und tiefstem Sonnenstand $\delta = -23°26'21''$:
Morgenweite $\omega \approx -27°21'$, Tagbogen $\tau \approx 151°1'$
von Sonnenaufgang bis -untergang dauert es 10h 4m

■ bei $\varphi = 60°$ und höchstem Sonnenstand $\delta = 23°26'21''$:
Morgenweite $\omega \approx 52°41'$, Tagbogen $\tau \approx 277°18'$
von Sonnenaufgang bis -untergang dauert es 18h 29m

■ bei $\varphi = 60°$ und tiefstem Sonnenstand $\delta = -23°26'21''$:
Morgenweite $\omega \approx -52°41'$, Tagbogen $\tau \approx 82°42'$
von Sonnenaufgang bis -untergang dauert es 5h 31m

Aufgabe 1.10

→ Vertiefung 1.5.2, Formeln 1.14, 1.15

Bestimmen Sie die Morgenweite und den Tagbogen der Sonnenbahn am 1. August ($\delta_\odot = 17°\,57'$) für die folgenden Beobachtungsorte:

a. Stockholm ($\varphi = 59°\,20'$)
b. Rom ($\varphi = 41°\,54'$)
c. Alexandria ($\varphi = 31°\,13'$)

Lösung 1.10

a. Morgenweite $\omega \approx 37°\,10'$, Tagbogen $\tau \approx 246°\,14'$
b. Morgenweite $\omega \approx 24°28'$, Tagbogen $\tau \approx 213°48'$
c. Morgenweite $\omega \approx 21°07'$, Tagbogen $\tau \approx 202°39'$

Aufgabe 1.11

→ Vertiefung 1.5.2, Formeln 1.14, 1.15

Der Beobachtungsort sei Berlin ($\varphi = 52°\,31'$). Bestimmen Sie die Morgenweite ω und den Tagbogen τ der folgenden Fixsterne:

a. Arktur ($\delta = 19°\,11'$)
b. Capella ($\delta = 46°\,0'$)
c. Spica ($\delta = -11°\,10'$)

Lösung 1.11

a. Morgenweite $\omega \approx 32°41'$, Tagbogen $\tau \approx 233°58'$
b. Capella ist in Berlin zirkumpolar.
c. Morgenweite $\omega \approx -18°33'$, Tagbogen $\tau \approx 150°10'$

→ Vertiefung 1.5.4

Aufgabe 1.12

Im Vergleich zum altägyptischen Wandeljahr ist das siderische Jahr um etwa einen Vierteltag länger. Der heliakische Aufgang des Sirius wanderte deshalb in der Regel in vier Jahren – ganz selten in drei Jahren – um einen Kalendertag weiter. Ein Kalendertag entspricht somit (meistens) einem vierjährigen und (selten) einem dreijährigen Unterzyklus[2] des Sothis-Zyklus. Nach [Gau11] endete ein Sothis-Zyklus im Juli 138 n. Chr. und enthielt 1455 julianische Jahre (Bezugsort Memphis).

a. Wie viele dreijährige Unterzyklen enthielt dieser Sothis-Zyklus?
b. Berechnen Sie für diesen Sothis-Zyklus die mittlere Dauer zwischen zwei heliakischen Sirius-Aufgängen.

2 Ein vierjähriger Unterzyklus wird *Tetraëteris*, ein dreijähriger *Triëteris* genannt. Censorinus glaubte, dass sämtliche solche Unterzyklen Tetraëteriden seien.

Lösung 1.12

a. Jeder Unterzyklus entspricht einem Kalendertag im ägyptischen Kalender. Sei x die Anzahl der 4-jährigen Unterzyklen, und sei y die Anzahl der 3-jährigen Unterzyklen. Dann gilt: $x + y = 365$ und $x \cdot 4 + y \cdot 3 = 1455$. Wir schliessen $x = 360$, $y = 5$. Es gibt also 5 dreijährige Unterzyklen.
b. Innert diesen 1455 julianischen Jahren gibt es 1455 heliakische Sirius-Aufgänge. Ist x die gesuchte mittlere Dauer, so gilt: $1455 \cdot x = 1456 \cdot 365$. Es folgt $x = \frac{1456}{1455} \cdot 365 \approx 365.250859$ Tage.

2 Aufgaben zum Montag

Aufgabe 2.1

→ Abschnitt 2.1

Aristarch berechnete aus dem im Bild 2.2 dargestellten rechtwinkligen Dreieck (Halbmond) das Entfernungsverhältnis von Erde-Mond zu Erde-Sonne. Er nahm dabei an, dass der Winkel α zwischen der Hypotenuse (Erde-Sonne) und der kürzeren Kathete (Erde-Mond) 87° beträgt.

a. Bestimmen Sie unter Aristarchs Annahme für dieses Entfernungsverhältnis eine Näherung (als Verhältnis zweier ganzer Zahlen).
b. In Wirklichkeit beträgt das Entfernungsverhältnis ca. 1:400. Wie gross ist der Winkel α?

Lösung 2.1

a. $\cos(87°) \approx 0.052336$. Näherung $1:19$ oder $9:172$ *(→ Mathematische Hilfsmittel, 9.2)*
b. $\cos\alpha = \frac{1}{400} \Rightarrow \alpha \approx 89.86°$.

Aufgabe 2.2

→ Abschnitt 2.2.1

a. Nach Hartner begann der babylonische 19-jährige Schaltzyklus mit einem (embolistischen) Ululu-Jahr und die weiteren Schaltungen erfolgten im 3., 6., 9., 11., 14. und 17. Jahr [Har79]. Zeigen Sie, dass diese Verteilung der embolistischen Jahre *nicht kanonisch*, aber *möglichst gleichmässig* ist *(→ Mathematische Hilfsmittel, 9.3)*. Bestimmen Sie die Zeitverschiebung v und die Indexverschiebung d gegenüber der kanonischen Verteilung.
b. Nach anderen Quellen finden die Schaltungen im 3., 6., 8., 11., 14., 17. und 19. Zyklusjahr statt, das einzige Ululu-Jahr ist das 17. Jahr. Zeigen Sie, dass auch diese Verteilung möglichst gleichmässig ist, und berechnen Sie die Zeitverschiebung v und die Indexverschiebung d gegenüber der kanonischen Verteilung.

Lösung 2.2

a. Kanonische Verteilung:
   $k_1 = 3,\ k_2 = 6,\ k_3 = 9,\ k_4 = 11,\ k_5 = 14,\ k_6 = 17,\ k_7 = 19$
   Babylonische Verteilung:
   $t_1 = 1,\ t_2 = 3,\ t_3 = 6,\ t_4 = 9,\ t_5 = 11,\ t_6 = 14,\ t_7 = 17$
   Kanonische Differenzenfolge: $(3, 3, 3, 2, 3, 3, 2)$

Babylonische Differenzenfolge: $(3, 2, 3, 3, 2, 3, 3)$
Das Ululu-Jahr entspricht somit dem 9. Jahr des kanonischen Zyklus. Es gilt also $v = 8$ und $d = \lfloor 8 \cdot \frac{7}{19} \rfloor = 2 \;\; (t_m = k_{m+2} - 8)$

b. Variante der Babylonischen Verteilung:
$t_1 = 3,\ t_2 = 6,\ t_3 = 8,\ t_4 = 11,\ t_5 = 14,\ t_6 = 17,\ t_7 = 19$
mit der Differenzenfolge $(3, 3, 2, 3, 3, 3, 2)$. Das erste Jahr dieses Zyklus entspricht dem 14. Jahr des kanonischen Zyklus.
Es gilt also $v = 13$ und $d = \lfloor 13 \cdot \frac{7}{19} \rfloor = 4 \;\; (t_m = k_{m+4} - 13)$

→ Abschnitt 2.2.2

Aufgabe 2.3

a. Der Metonsche Zyklus enthält 235 Mondmonate und dauert 6940 Tage. Verifizieren Sie, dass er aus 125 *vollen* und 110 *hohlen* Mondmonaten besteht.

b. Der Kallippische Zyklus umfasst 940 Mondmonate und dauert 27 759 Tage. Wie viele volle und hohle Monate enthält ein Kallippischer Zyklus?

Lösung 2.3

a. $6940 - 235 \cdot 29 = 125$. Also müssen 125 Monate voll und $110 = 235 - 125$ Monate hohl sein.

b. $27759 - 940 \cdot 29 = 499$. Ein Kallippischer Zyklus enthält also 499 volle und $441 = 940 - 499$ hohle Monate $(499 \cdot 30 + 441 \cdot 29 = 27759)$.

→ Abschnitt 2.2.1

Aufgabe 2.4

Vor der Einführung des 19-jährigen Zyklus, d.h. von 527 bis 504 v. Chr., gab es in Babylon gemäss Hartner drei 8-jährige Zyklen [Har79]. Diese enthielten ebenfalls Ululu- und Adaru-Jahre, und zwar nach der folgenden Regel *(→ Bild 2.2)*:

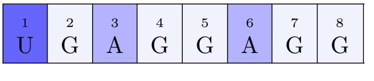

Bild 2.2
8-jähriger Babylonischer Zyklus mit drei embolistischen Jahren (G: Gemeinjahr, U: Ululu-Jahr, A: Adaru-Jahr)

Gehen Sie davon aus, dass das tropische Jahr damals 365.242514 d dauerte. (Gerechnet nach [Hey06].)

a. Die drei 8-jährigen Zyklen hatten je eine Länge von 2924 Tagen [PD56, S. 30]. Wie gross war die Abweichung des mittleren Lunisolarjahres vom tropischen Jahr im 8-jährigen Zyklus?

b. Der erste 19-jährige Zyklus begann im Jahr 503 v. Chr.; insgesamt sind 30 solche Zyklen überliefert. Zehn 19-jährige Zyklen enthielten je 6939 Tage und die restlichen je 6940 Tage [PD56, S. 30-47]. Berechnen Sie die mittlere Länge eines Lunisolarjahres über alle 30 neunzehnjährigen Zyklen sowie die Abweichung dieser mittleren Länge vom tropischen Jahr.

c. Wie lange dauerte es in jedem der beiden Zyklen, bis sich diese Abweichung zu einem Tag kumulierte?

Lösung 2.4

a. Die mittlere Länge des Jahres beträgt also $2924/8\,\mathrm{d} = 365.5\,\mathrm{d}$ und die mittlere Abweichung vom tropischen Jahr $(365.5 - 365.242514)\mathrm{d} \approx 0.257486\,\mathrm{d} \approx 6\,\mathrm{h}\,10\,\mathrm{m}\,46.8\,\mathrm{s}$

b. Die 30 Zyklen dauerten $10 \cdot 6939 + 20 \cdot 6940 = 208\,190$ Tage. Die mittlere Länge des Jahres beträgt also $208\,190/(30 \cdot 19)\,\mathrm{d} \approx 365.245614\,\mathrm{d}$ und die mittlere Abweichung vom tropischen Jahr $(365.245614 - 365.242514)\,\mathrm{d} \approx 0.00310\,\mathrm{d} \approx 4\,\mathrm{m}\,27.8\,\mathrm{s}$

c. Im 8-jährigen Zyklus: $1/0.257486 \approx 3.88$, also ca. 4 Jahre.
Im 19-jährigen Zyklus: $1/0.0031 \approx 322.6$ also ca. 320 Jahre.

Aufgabe 2.5

→ Abschnitt 2.2.1, 2.2.2

Die Länge des tropischen Jahres beträgt 365.24218 d und die Länge des synodischen Monats 29.53059 d (gerundete Werte für das Jahr 2000). Für die Synchronisierung von Sonnen- und Mondjahr können die *Näherungsbrüche* des Kettenbruchs der Zahl

$$\frac{36524218}{2953059} = \frac{365.24218}{29.53059}$$

verwendet werden *(→ Mathematische Hilfsmittel, 9.2)*.
Bestimmen Sie diesen Kettenbruch und berechnen Sie die Näherungsbrüche der Ordnungen 0 bis und mit 5 und ordnen Sie diese (aufsteigend) der Grösse nach. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Näherungsbrüchen und dem Schaltzyklus eines Lunisolarkalenders?

Lösung 2.5

$$\frac{36524218}{2953059} = [12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, 4, 5, 3, \dots]$$

Ordnung	0	2	4	5	3	1

Näherungsbruch $\frac{12}{1} < \frac{37}{3} < \frac{136}{11} < \frac{235}{19} < \frac{99}{8} < \frac{25}{2}$

Die Näherungsbrüche geben Anlass zu Zyklen für die Synchronisierung von Sonnen- und Mondjahren: Der Näherungsbruch 3. Ordnung entspricht dem 8-jährigen Zyklus mit 99 Monaten, derjenige 5. Ordnung dem 19-jährigen Zyklus mit 235 Monaten. Im 8-jährigen Zyklus wird dreimal, im 19-jährigen 7mal geschaltet.

→ Abschnitt 2.2.2

Aufgabe 2.6

In der antiken babylonischen Mathematik wurde für die Zahldarstellung das Sexagesimalsystem *(→ Fussnote 4)* verwendet[3].

a. Für die Länge des synodischen Monats gab der griechische Astronom Hipparch *(→ Sonntag, Fussnote 10)* im 2. vorchristlichen Jahrhundert den Wert

$$\langle 29; 31, 50, 8, 20\rangle_{60} = 29 + \tfrac{31}{60} + \tfrac{50}{60^2} + \tfrac{8}{60^3} + \tfrac{20}{60^4}$$

an[4]. Stellen Sie diese Zahl im Dezimalsystem dar (mit 10 Nachkommastellen).

b. Wir nehmen hier an, dass die Gleichung

$$19 \text{ tropische Jahre} = 235 \text{ synodische Monate}$$

exakt sei. Wie lange dauert demzufolge das tropische Jahr? (Verwenden Sie für den synodischen Monat die Hipparchische Länge. Stellen Sie das Ergebnis sowohl im Sexagesimal- als auch im Dezimalsystem dar.)

3 Spuren davon sind auch bei uns noch vorhanden, nämlich bei der Stundeneinteilung und der Angabe von Winkeln.

4 Man nimmt an, dass Hipparch diesen Wert von den Babyloniern übernommen hat [Har79, S. 4].

Lösung 2.6

a. 29.5305941358 d

b. $235 \cdot 29.5305941358/19 \approx 365.246822206$ d $\approx$
$\langle 6, 05; 14, 48, 33, 36\rangle_{60}$ d $\approx$ 365 d 5 h 55 m 25.4 s

Aufgabe 2.7

→ Abschnitt 2.2.1

Eine totale Sonnenfinsternis findet zum genauen Zeitpunkt der Konjunktion von Sonne und Mond statt. Ohne Hilfsmittel der theoretischen Astronomie ist es kaum möglich, den genauen Zeitpunkt des Neumondes zu bestimmen. Mit Hilfe der Beobachtung von totalen Sonnenfinsternissen kann man die Länge des synodischen Monats annähern.
Nehmen wir an, dass man auch bei gewissen partiellen Sonnenfinsternissen den Zeitpunkt der Konjunktion mit genügender Genauigkeit bestimmen kann. Bekannte Zeitpunkte sind z.B. der 21. September 1903 um 04:40 Uhr und der 20. September 1960 um 23:00 Uhr. Was können Sie aus diesen Daten für die Länge des synodischen Monats schliessen?
Hinweis: Beachten Sie, dass die Länge des zu betrachtenden Zeitintervalls genau $57 = 3 \cdot 19$ Jahre beträgt.

Lösung 2.7

Die 57 Jahre vom 21.09.1903 bis zum 20.09.1960 enthalten 15 Schalttage und damit $57 \cdot 365 + 15 = 20819$ Tage. Berücksichtigt man auch die Tageszeiten der Finsternisse, so sind es ≈ 20819.764 d. Andererseits müssen in drei 19-jährigen Zyklen genau $3 \cdot 235 = 705$ Lunationen enthalten sein. (Eine Lunation mehr oder weniger gäbe schon eine deutliche Abweichung.) Zur Bestimmung der mittleren Länge einer Lunation dividieren wir somit 20819.764 durch 705. Das Resultat 29.53158 d ist eine nicht allzu gute Näherung für die Länge des synodischen Monats.

3 Aufgaben zum Dienstag

→ Abschnitt 3.2.1

Aufgabe 3.1

Der Abstand d_1 eines Hauptscheitels vom näheren Brennpunkt einer Ellipse beträgt $d_1 = a - e$, der Abstand vom ferneren Brennpunkt misst $d_2 = a + e$.

a. Drücken Sie das arithmetische und das geometrische Mittel der beiden Abstände d_1 und d_2 durch a und b aus.
b. Drücken Sie auch das harmonische Mittel der beiden Abstände durch a und b aus. Hinweis: Verwenden Sie das Resultat von Aufgabenteil a.

Lösung 3.1

a. Arithmetisches Mittel: $\frac{1}{2} \cdot (d_1 + d_2) = a$;

   Geometrisches Mittel: $\sqrt{d_1 \cdot d_2} = \sqrt{(a+e)(a-e)} = \sqrt{a^2 - e^2} = b$

b. Harmonisches Mittel: $\dfrac{2}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}} = \dfrac{2 \cdot d_1 \cdot d_2}{d_1 + d_2} = \dfrac{2b^2}{2a} = \dfrac{b^2}{a}$

→ Abschnitt 3.2.2

Aufgabe 3.2

Nach dem ersten Keplerschen Gesetz bewegen sich die Planeten auf elliptischen Bahnen mit der Sonne in einem der Brennpunkte.

Berechnen Sie für die Planeten Merkur und Mars die kleine Bahnhalbachse sowie die kleinste und die grösste Entfernung von der Sonne (Masseinheit AE). Entnehmen Sie die grosse Halbachse und die numerische Exzentrizität der betreffenden Planetenbahn der Tabelle 3.1.

Lösung 3.2

Merkur: grosse Bahnhalbachse $a = 0.38710$ AE; numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0.20563$; lineare Exzentrizität $e = a \cdot \varepsilon \approx 0.07960$ AE; kleine Bahnhalbachse $b = \sqrt{a^2 - e^2} \approx 0.37883$ AE; kleinste Entfernung $a - e \approx 0.30750$ AE; grösste Entfernung $a + e \approx 0.46670$ AE.

Mars: $a = 1.52366$ AE; $\varepsilon = 0.09341$; $e = a \cdot \varepsilon \approx 0.14233$ AE; $b = \sqrt{a^2 - e^2} \approx 1.5170$ AE; $a - e \approx 1.38133$ AE; $a + e \approx 1.66599$ AE.

Aufgabe 3.3

→ Abschnitt 3.2.4

Das dritte Keplersche Gesetz *(→ Formel 3.4)* kann auch wie folgt geschrieben werden:

Für alle Planetenbahnen mit demselben Zentralgestirn nimmt der Quotient T^2/a^3 (sog. *Kepler-Konstante*) denselben Wert an.

a. Überprüfen Sie diese Aussage anhand der Beispiele von Tabelle 3.1.
b. Wir nehmen an, dass die Bahnen zweier Planeten mit demselben Zentralgestirn unterschiedliche grosse Halbachsen $a_1 < a_2$ haben. Welcher Planet hat die grössere mittlere Winkelgeschwindigkeit?

Lösung 3.3

a. Bestimmung der Kepler-Konstanten:

Tabelle 3.2
Planetenbahnen

Planet	Grosse Bahnhalbachse a in AE	Siderische Umlaufzeit T in Jahren	Kepler-Konstante T^2/a^3
Merkur	0.38710	0.24085	0.997
Venus	0.72332	0.61520	1.000
Erde	1	1	1
Mars	1.52366	1.88089	1.000
Jupiter	5.204	11.8683	0.999
Saturn	9.582	29.4577	0.986
Uranus	19.20	84.0139	0.997
Neptun	30.05	164.793	1.001

b. Ist T die Umlaufzeit eines Planeten um das Zentralgestirn und ω seine mittlere Winkelgeschwindigkeit, so gilt $\omega \cdot T = 360°$. Bezeichnet T_1 die Umlaufzeit des ersten und T_2 diejenige des zweiten Planeten und sind ω_1 bzw. ω_2 die entsprechenden mittleren Winkelgeschwindigkeiten, so gilt also $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1}$.
Mit dem 3. Keplerschen Gesetz folgt, dass

$$\frac{{\omega_1}^2}{{\omega_2}^2} = \frac{{T_2}^2}{{T_1}^2} = \frac{{a_2}^3}{{a_1}^3}.$$

Also hat der Planet mit der kleineren grossen Halbachse die grössere mittlere Winkelgeschwindigkeit: $\omega_1 > \omega_2$.

→ Abschnitt 3.2.1

Aufgabe 3.4

In dieser Aufgabe wird die *Koordinatengleichung der Ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

mit Halbachsen a und b hergeleitet.

a. Legen Sie ein kartesisches Koordinatensystem so in die Ellipse von (→ *Bild 3.4*), dass die Hauptachse zur x-Achse und die Nebenachse zur y-Achse wird. Welche Koordinaten haben die Brennpunkte F_1 und F_2?

b. Schreiben Sie die Formel 3.1 für einen beliebigen Ellipsenpunkt $P(x, y)$ in Koordinatenform.

c. Vereinfachen Sie die erhaltene Gleichung und beweisen Sie schliesslich mit Hilfe von Formel 3.3, dass die Punkte der Ellipse die Gleichung 3.1 erfüllen. (Hinweis: Entfernen Sie die beiden Quadratwurzeln im Resultat von b. durch zweimaliges Quadrieren.)

Lösung 3.4

a.

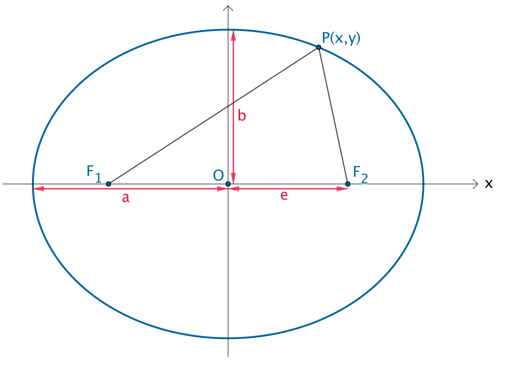

Bild 3.3
Ellipse mit Brennpunkten im Koordinatensystem

Brennpunkte: $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$

b. Summe der Brennpunktsabstände des Punktes $P(x, y)$ (→ *Formel 3.1*):

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

c. • Gleichung zunächst nach einer Quadratwurzel auflösen und dann quadrieren:

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2$$

- Verbliebene Quadratwurzel isolieren, Gleichung vereinfachen und dann nochmals quadrieren:

$$4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-e)^2 - (x+e)^2$$

$$a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2 - ex$$

$$a^2((x-e)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

- Distributivgesetz anwenden:

$$a^2x^2 - 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

- Gleichung vereinfachen und Terme mit x und y auf die linke Seite, Konstante auf die rechte Seite bringen:

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$$

- Formel 3.3 verwenden: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

- Division durch a^2b^2: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Aufgabe 3.5

→ Abschnitt 3.2.1

Im Bild 3.4 wird die sogenannte Fähnchenkonstruktion dargestellt.

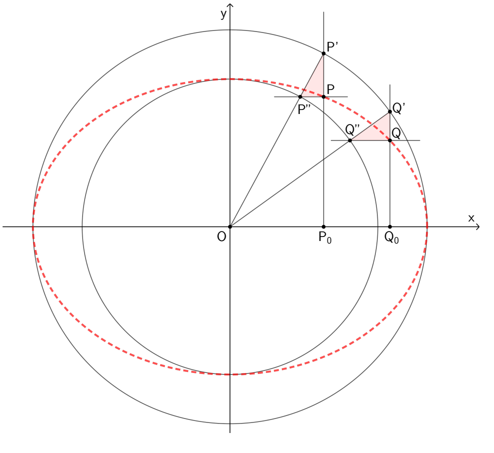

Bild 3.4
Fähnchenkonstruktion der Ellipse mit Halbachsenverhältnis $a : b = 4 : 3$

a. Eine Ellipse hat die grosse Halbachse $a = 8$ cm und die kleine Halbachse $b = 6$ cm. Konstruieren Sie einige Punkte dieser Ellipse mit Zirkel und Lineal und skizzieren Sie dann die Kurve.

b. Seien P_0, P und P' wie in der Figur. Zeigen Sie, dass $\overline{P_0P} : \overline{P_0P'} = b : a$.

c. Zeigen Sie nun, dass für jeden so konstruierten Punkt $P(x, y)$ die Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *(→ Aufgabe 3.4)* erfüllt ist.

Lösung 3.5

a. siehe Bild 3.4

b. Die Strecke PP'' ist parallel zur Hauptachse. Nach dem 1. Strahlensatz gilt somit $\overline{P_0P} : \overline{P_0P'} = \overline{OP''} : \overline{OP'} = b : a$, denn $\overline{OP''} = b$ und $\overline{OP'} = a$.

c. P_0 hat Koordinaten $(x, 0)$. Nach Teilaufgabe b. gilt $y = \overline{P_0P} = \frac{b}{a} \cdot \overline{P_0P'}$, also $\overline{P_0P'} = \frac{a}{b} \cdot \overline{P_0P}$ und somit

$$a^2 = \overline{OP'}^2 = \overline{OP_0}^2 + \overline{P_0P'}^2 = x^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2.$$

Division durch a^2 liefert

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

→ Vertiefung 3.3.3

Aufgabe 3.6

a. Die Drehung des Perihels gegenüber den Jahrespunkten beträgt ca. 61.9 Bogensekunden pro Jahr *(→ Vertiefung 3.3.2)*. Wir nehmen die Grösse dieser Verschiebung als konstant an. Wie viele Jahre dauert es, bis die Jahrespunkte sich wieder am selben Ort der Erdbahnellipse befinden? (Diese Zeitspanne heisst **Pythagoreisches Jahr**.)

b. Die jährliche Drehung des Perihels gegenüber dem Fixsternhimmel beträgt 11.6 Bogensekunden *(→ Vertiefung 3.3.2)*, was wir hier ebenfalls als konstant annehmen. Wie viele Jahre dauert es, bis das Perihel gegenüber dem Fixsternhimmel wieder dieselbe Lage hat? (Diese Zeitspanne heisst **Euklidisches Jahr**.)

Lösung 3.6

$360°$ sind $1\,296\,000''$ Bogensekunden.

a. Es dauert somit $\frac{1\,296\,000}{61.9} \approx 20\,900$ Jahre, bis die Jahrespunkte einen ganzen Umlauf auf der Erdbahnellipse vollbracht haben.

b. Es dauert $\frac{1\,296\,000}{11.6} \approx 111\,700$ Jahre, bis das Perihel gegenüber dem Fixsternhimmel wieder dieselbe Lage hat.

4 Aufgaben zum Mittwoch

→ Abschnitt 4.1.1

Aufgabe 4.1

Die Epoche des *Koptischen Kalenders* ist julianisch der 29. August 284. Das koptische Jahr mit Jahreszahl j ist genau dann ein Schaltjahr, wenn $j \bmod 4 = 3$ *(→ Mathematische Hilfsmittel)*.

a. An welchem Datum des Julianischen Kalenders begann das zehnte Schaltjahr des Koptischen Kalenders?
b. Wann begann julianisch das darauffolgende Jahr?
c. Wann beginnt das Koptische Jahr 1760 im Julianischen Kalender? Wann im Gregorianischen Kalender? Von wann bis wann dauert das nächstfolgende koptische Schaltjahr im Gregorianischen Kalender?

Lösung 4.1

a. 29.08.322 *(→ Tabelle 4.3)*

Tabelle 4.3 Schaltjahre im Koptischen Kalender

Koptisches Jahr	Beginn	Ende	
1	29.08.284	28.08.285	
2	29.08.285	28.08.286	
3	29.08.286	29.08.287	1. Koptisches Schaltjahr
4	30.08.287	28.08.288	365 Tage, da julianisches Schaltjahr
5	29.08.288	28.08.289	
...	...	...	
38	29.08.321	28.08.322	
39	29.08.322	29.08.323	10. Koptisches Schaltjahr
40	30.08.323	28.08.324	365 Tage, da julianisches Schaltjahr
...	...	...	

b. 30.08.323 *(→ Tabelle 4.3)*
c. 30.08.2043; 12.09.2043; 11.09.2046 bis 11.09.2047

→ Abschnitt 4.1.2

Aufgabe 4.2

Omar Khayyam (1048-1131) schlug als Näherung für die Länge des tropischen Jahres $\left(365 + \frac{8}{33}\right)$ d vor. Mit welcher Schaltregel liesse sich dieser Vorschlag praktisch umsetzen? Geben Sie mindestens zwei verschiedene Verteilungen von 8 Schaltungen auf einen Zyklus von 33 Jahren an, welche *möglichst gleichmässig* sind *(→ Mathematische Hilfsmittel, 9.3.2)*.

Lösung 4.2

Im Folgenden geben wir vier von möglichen 33 Lösungen an.

1. Kanonische Verteilung: $5 \le 9 \le 13 \le 17 \le 21 \le 25 \le 29 \le 33$
   mit Differenzenfolge $(5,4,4,4,4,4,4,4)$
2. Möglichst gleichmässig: $1 \le 5 \le 9 \le 13 \le 17 \le 21 \le 25 \le 29$
   mit Differenzenfolge $(5,4,4,4,4,4,4,4)$
   Zeitverschiebung $v = 4$, Indexverschiebung $d = 0$ $(t_m = k_m - 4)$
3. Möglichst gleichmässig: $1 \le 6 \le 10 \le 14 \le 18 \le 22 \le 26 \le 30$
   mit Differenzenfolge $(4,5,4,4,4,4,4,4)$
   Verschiebungen $v = 32$ und $d = 7$ $(t_m = k_{m+7} - 32)$
4. Möglichst gleichmässig: $4 \le 8 \le 12 \le 16 \le 21 \le 25 \le 29 \le 33$
   mit Differenzenfolge $(4,4,4,4,5,4,4,4)$
   Verschiebungen $v = 17$ und $d = 4$ $(t_m = k_{m+4} - 17)$

Dabei bezeichnet $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ die kanonische Verteilung und ihre zyklische Fortsetzung und $(t_m)_{m\le 8}$ die gegebene möglichst gleichmässige Verteilung.

Aufgabe 4.3

→ Abschnitt 4.2, Vertiefung 4.3.2

Werden 7 Schaltungen auf 19 Zeiteinheiten *kanonisch* verteilt, so erfolgen die Schaltungen in der 3., 6., 9., 11., 14., 17. und 19. Zeiteinheit. Die Verteilung der embolistischen Mondjahre im 19-jährigen Zyklus des Jüdischen Kalenders (3., 6., 8., 11., 14., 17. und 19. Jahr) ist nicht kanonisch, aber *möglichst gleichmässig(→ Mathematische Hilfsmittel, 9.3)*. D.h. sie geht durch eine Zeitverschiebung um v Jahre und eine Indexverschiebung d aus der kanonischen Verteilung hervor.

a. Bestimmen Sie v und d.
b. Ginzel erwähnt zwei weitere möglichst gleichmässige Verteilungen der embolistischen Mondjahre auf den 19-jährigen Zyklus, die in Gebrauch waren, bevor der zyklische Jüdische Kalender seine aktuelle Form bekam [Gin11, S. 75]. Embolistisch waren:
   das 3., 5., 8., 11., 14., 16. und 19. Jahr bzw.
   das 3., 6., 8., 11., 14, 16. und 19. Jahr.
   Bestimmen Sie v und d auch für diese Verteilungen.

Lösung 4.3

Die Differenzenfolge der kanonischen Verteilung ist (3, 3, 3, 2, 3, 3, 2).

a. Der jüdische 19-jährige Zyklus hat die Differenzenfolge (3, 3, 2, 3, 3, 3, 2). Daraus ergibt sich die Zeitverschiebung $v = 11$ und die Indexverschiebung $d = 4$ ($t_m = k_{m+4} - 11$, mit Notation wie in Aufgabe 4.2).

b. Die Differenzenfolgen der von Ginzel angegebenen Verteilungen sind (3, 2, 3, 3, 3, 2, 3) bzw. (3, 3, 2, 3, 3, 2, 3). Für die Zeitverschiebung ergibt sich im ersten Fall $v = 14$ und im zweiten $v = 3$. Die Indexverschiebung beträgt allgemein $d = \lfloor v \cdot \frac{7}{19} \rfloor$, im ersten Fall also $d = 5$ und im zweiten $d = 1$, was man auch aus der Differenzenfolge ablesen kann.

→ Vertiefung 4.3.1

Aufgabe 4.4

Der vermutete 2820-jährige Zyklus des Persischen Sonnenkalenders setzt sich aus 22 kleineren Zyklen zusammen: 21 Zyklen enthalten 128 Jahre und einer enthält 132 Jahre.

a. Wie viele Schaltjahre enthält ein 128-jähriger Zyklus? Wie lange dauert ein mittleres Kalenderjahr in einem solchen Zyklus?

b. Wie viele Schaltjahre enthält ein 132-jähriger Zyklus? Wie lange dauert ein mittleres Kalenderjahr in einem solchen Zyklus? Was fällt auf?

Lösung 4.4

a. Der 128-jährige Zyklus enthält 31 Schaltjahre. Das mittlere Kalenderjahr dauert $(128 \cdot 365 + 31)/128 = 365 + 31/128 = 365.2421875$ d.

b. Der 132-jährige Zyklus enthält 32 Schaltjahre. Das mittlere Kalenderjahr dauert $365 + 32/132 = 365.\overline{24}$ d.
Dies stimmt überein mit der Länge des mittleren Sonnenjahres in einem Zyklus von 33 Jahren mit 8 Schaltjahren ($32/132 = 8/33$).

→ Abschnitt 4.2, Vertiefung 4.3.3

Aufgabe 4.5

Vergleichen Sie die im jüdischen Kalender angenommene Dauer für den synodischen Monat (29 d 12 h 793 ch) mit dem von Hipparch angegebenen Wert $\langle 29; 31, 50, 8, 20 \rangle_{60}$ (im Sexagesimaldarsystem, vgl. Aufgabe 2.6). Stellen Sie die Tagesbruchteile beider Werte in Stunden als gekürzte Brüche dar.

Lösung 4.5

29 d kann weggelassen werden:

$$12\,\mathrm{h}\ 793\,\mathrm{ch} = \left(12 + \tfrac{793}{1080}\right)\mathrm{h} = \tfrac{13753}{1080}\,\mathrm{h}$$

$$\begin{aligned}\langle 0; 31, 50, 8, 20\rangle\,\mathrm{d} &= 24 \cdot \left(\tfrac{31}{60} + \tfrac{50}{60^2} + \tfrac{8}{60^3} + \tfrac{20}{60^4}\right)\mathrm{h}\\ &= 24 \cdot \left(\tfrac{31 \cdot 60^3 + 50 \cdot 60^2 + 8 \cdot 60 + 20}{60^4}\right)\mathrm{h}\\ &= 24 \cdot \left(\tfrac{6\,696\,000 + 180\,000 + 480 + 20}{12\,960\,000}\right)\mathrm{h}\\ &= \tfrac{6\,876\,500}{540\,000}\,\mathrm{h} = \tfrac{13753}{1080}\,\mathrm{h}\end{aligned}$$

Die beiden Werte stimmen überein. Es ist anzunehmen, dass die jüdischen Astronomen diesen Wert von Hipparch übernommen haben.

Aufgabe 4.6

→ Abschnitt 4.2, Vertiefung 4.3.3

Wir nehmen an, dass der *Molad Tischri* des Gemeinjahres j der jüdischen Zeitrechnung auf den 3. Wochentag um 10 h 744 ch jüdischer Zeit fällt.

a. Bestimmen Sie den Wochentag und die jüdische Tageszeit für den Eintritt des *Molad Tischri* im Jahr $j+1$.
b. Erklären Sie, warum das Jahr $j+1$ erst am 2. Wochentag beginnen wird.
c. Erläutern Sie, warum auch *Rosch Haschana* des Jahres j um zwei Tage auf den fünften Wochentag verschoben wird.
d. Ist das Gemeinjahr j mangelhaft, regulär oder überzählig?

Lösung 4.6

a. $3\,\mathrm{d}\ 10\,\mathrm{h}\ 744\,\mathrm{ch} + 4\,\mathrm{d}\ 8\,\mathrm{h}\ 876\,\mathrm{ch} = 7\,\mathrm{d}\ 19\,\mathrm{h}\ 540\,\mathrm{ch}$. Der Eintritt des *Molad Tischri* im Folgejahr ist an einem Sabbat um 19 h 540 ch.
b. Da der *Molad Tischri* des Jahres $j+1$ an einem Sabbat nach 18 Uhr eintritt, wird der Jahresbeginn nach der Regel „Jach – Adu“ um zwei Tage verschoben.
c. Da der *Molad Tischri* des Gemeinjahres j an einem 3. Wochentag nach 9 h 204 ch eintritt, wird *Rosch Haschana* nach der Regel „Gatrad“ auf den fünften Tag verschoben.
d. Das Gemeinjahr j enthält 354 Tage, denn vom 5. bis zum 2. Wochentag vergehen 4 Tage. Das Jahr j ist also *regulär*.

→ Abschnitt 4.2, Vertiefung 4.3.3

Aufgabe 4.7

Von einem embolistischen Jahr a der jüdischen Zeitrechnung sei bekannt, dass der *Molad Tischri* des Folgejahres an einem 2. Wochentag um 16 h 49 ch jüdischer Zeit eintreten wird.

a. Bestimmen Sie den Wochentag und die jüdische Tageszeit für den Eintritt des *Molad Tischri* im Jahr a.
b. Erläutern Sie, warum das Jahr a erst am 5. Wochentag beginnt.
c. An welchem Wochentag beginnt das Jahr $a+1$?
d. Ist das embolistische Jahr a mangelhaft, regulär oder überzählig?

Lösung 4.7

a. 9 d 16 h 49 ch – 5 d 21 h 589 ch = 3 d 18 h 540 ch. Also tritt der *Molad Tischri* im Jahr a an einem 3. Wochentag um 18 h 540 ch ein.
b. Tritt der *Molad Tischri* an einem dritten Wochentag nach 18 Uhr ein, so wird der Jahresbeginn nach der Regel „Jach – Adu“ um zwei Tage verschoben.
c. Da der Molad Tischri des Jahres $a+1$ auf einen zweiten Wochentag nach 15 h 589 ch fällt, wird der Jahresbeginn gemäss Regel „Betutakpat“ *(→ siehe* ***IV.****)* um einen Tag auf den dritten Wochentag verschoben.
d. Der Charakter eines regulären embolistischen Jahres beträgt 6 d. Vom 5. bis zum 3. Wochentag sind es jedoch nur 5 d. Also enthält das embolistische Jahr a nur 383 d und ist somit *mangelhaft*.

→ Abschnitt 4.2, Vertiefung 4.3.3

Aufgabe 4.8

Berechnen Sie mit Hilfe des Charakters eines mittleren Mondgemeinjahres und eines mittleren embolistischen Jahres *(→ Aufgabe 4.6)* sowie von Tabelle 4.5

a. den Charakter eines 19-jährigen Zyklus. Dieser Charakter wurde in der Vertiefung 4.3.3 auf andere Art berechnet*(→ siehe* ***D****)*. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.
b. den jüdischen Wochentag und die Tageszeit für den Eintritt des *Molad Tischri* der jüdischen Jahre von 5796 bis und mit 5800.
c. den jüdischen Wochentag von *Rosch Haschana* ebenfalls für die Jahre 5796 bis und mit 5800.

Lösung 4.8

a. $12 \cdot (4\,\mathrm{d}\,8\,\mathrm{h}\,876\,\mathrm{ch}) + 7 \cdot (5\,\mathrm{d}\,21\,\mathrm{h}\,589\,\mathrm{ch})$

$$= 52\,\mathrm{d}\,9\,\mathrm{h}\,792\,\mathrm{ch} + 41\,\mathrm{d}\,6\,\mathrm{h}\,883\,\mathrm{ch}$$

$$= 93\,\mathrm{d}\,16\,\mathrm{h}\,595\,\mathrm{ch}$$

mit Charakter 2 d 16 h 595 ch.
Die beiden Ergebnisse stimmen überein.

b. Eintritt des Molad Tischri

Jahr	Wochentag	Tageszeit
5796	3	13 h 239 ch
5797	7	22 h 35 ch
5798	5	6 h 911 ch
5799	4	4 h 420 ch
5800	1	13 h 216 ch

Tabelle 4.4 Molad Tischri: Wochentag und Tageszeit

c. Wochentag von Rosch Haschana

Jahr	Wochentag	Vertagungsregel
5796	5	„Gatrad“
5797	2	„Jach – Adu“
5798	5	—
5799	5	„Adu“
5800	2	„Adu“

Tabelle 4.5 Wochentag von Rosch Haschana

Aufgabe 4.9

→ Abschnitt 4.2, Vertiefung 4.3.3

Bestimmen Sie für das Jahr 5766 der jüdischen Zeitrechnung den Wochentag und die Tageszeit des *Molad Tischri* sowie den Wochentag von *Rosch Haschana*.

Lösung 4.9

Das Jahr 5766 ist das 9. Jahr im Zyklus, der mit dem Jahr 5758 begann. Bis zum *Molad Tischri* des Jahres 5758 sind seit Erschaffung der Welt genau 303 ganze Zyklen vergangen. Der Charakter von 303 ganzen Zyklen ist der Charakter des 303-fachen Charakters eines Zyklus. Wir erhalten 2 d 22 h 1005 ch.
Zur Bestimmung des astronomischen Jahresbeginns 5758 muss noch der Wochenzeitpunkt der jüdischen Epoche addiert werden. Das ergibt 5 d 4 h 129 ch.

Der Wochentag des *Molad Tischri* 5758 war also der 5. Tag und die Uhrzeit 4 h 129 ch.
Von da an bis zum *Molad Tischri* 5766 sind 5 Gemeinjahre und 3 embolistische Jahre, insgesamt also $5 \cdot 12 + 3 \cdot 13 = 99$ Monate vergangen. Der Charakter von 99 synodischen Monaten ist der Charakter des 99-fachen Charakters eines synodischen Monats. Das sind 4 d 12 h 747 ch.
Für den Wochenzeitpunkt des *Molad Tischri* 5766 erhalten wir somit 2 d 16 h 876 ch; d.h., der *Molad Tischri* 5766 trat an einem 2. Wochentag um 16 h 876 ch ein.
Nun war das 9. Zyklusjahr ein Gemeinjahr, welches auf ein embolistisches Jahr folgte. Somit erfüllte der Zeitpunkt des *Molad Tischri* die Voraussetzungen der Vertagungsregel „Betutakpat" *(→ siehe **IV.**)*. Folglich wurde *Rosch Haschana* auf den dritten Wochentag verschoben.

Man kann diese Aufgabe auch lösen, in dem man vom Molad Tischri des 9. Jahres des darauffolgenden Zyklus ausgeht *(→ Tabelle 4.5)*. Im Jahr 5785 = 5758 + 19 tritt der Molad Tischri am 5. Tag um 9 h 391 ch ein. Der Charakter eines 19-jähriges Zyklus ist 2 d 16 h 595 ch *(→ siehe **D**)*. Der Wochenzeitpunkt des Molad Tischri 5758 ist also
5 d 9 h 391 ch – 2 d 16 h 595ch = 2 d 16 h 876 ch. Usw.

5 Aufgaben zum Donnerstag

Aufgabe 5.1

→ Abschnitt 5.1.1

Wir betrachten die folgenden zwei Aspekte der Korrektur des Julianischen Kalenders. Einerseits bestand die Absicht, das Frühlingsäquinoktium auf den „richtigen" Platz (21. März) zurückzubringen, und andererseits suchte man für die Zukunft eine neue Schaltregel, welche der Länge des Sonnenjahres besser entspricht.

a. Nikolaus von Kues und Paul von Middelburg haben sich mit dem ersten Aspekt befasst[5].
   - Von Kues schlug vor, im Jahr 1440 sieben Tage auszulassen. Welche mittlere Länge des Sonnenjahres im Zeitraum von 325 bis 1440 hat er dabei angenommen?
   - Von Middelburg behauptete, dass das Äquinoktium im Jahr 3000 auf den 1. März fallen werde, falls der Julianische Kalender unverändert beibehalten wird. Von welcher mittleren Länge des Sonnenjahres ist er dabei ausgegangen?

b. Für eine neue Schaltregel sind im Abschnitt 5.1.1 die folgenden vier Vorschläge erwähnt.
   - Robert Grosseteste: alle 300 Jahre den Schalttag ausfallen lassen.
   - Johannes von Sacrobosco: alle 288 Jahre den Schalttag ausfallen lassen.
   - Pierre d'Ailly: alle 134 Jahre den am nächsten liegenden Schalttag ausfallen lassen.
   - Nikolaus von Kues: alle 304 Jahre den Schalttag auslassen.

   Bestimmen Sie für jeden dieser Vorschläge die mittlere Länge des Sonnenjahres.

5 Nehmen Sie für diese Aufgabe an, dass das Äquinoktium im Jahr 325 auf den 21. März fiel.

Lösung 5.1

a.
   - $365.25 - \frac{7}{1115} \approx 365.243722$ Tage.
   - $3000 - 325 = 2675$, $365.25 - \frac{20}{2675} \approx 365.242523$ Tage.

b.
   - Grosseteste: $365.25 - \frac{1}{300} \approx 365.246667$ Tage.
   - Sacrobosco: $365.25 - \frac{1}{288} \approx 365.246527$ Tage.
   - D'Ailly: $365.25 - \frac{1}{134} \approx 365.242537$ Tage.
   - Von Kues: $365.25 - \frac{1}{304} \approx 365.246711$ Tage.

→ Abschnitt 5.1.2

Aufgabe 5.2

Das 15. Jahrhundert enthält die Jahre von 1401 bis und mit 1500, das 16. Jh. geht von 1501 bis 1600 und das 17. Jh. von 1601 bis und mit 1700.

a. Warum waren diese drei Jahrhunderte in Rom nicht gleich lang?
b. Wie viele Tage enthält jedes dieser drei Jahrhunderte?

Lösung 5.2

a. Im 15. Jh. galt noch der Julianische Kalender. Im 16. Jh. wurde die Gregorianische Reform umgesetzt, wobei im Oktober 1582 zehn Tage ausfielen. Wegen des ausfallenden Schalttags im Jahr 1700 ist das 17. um einen Tag kürzer als das 15. Jahrhundert.
b. Das 15. Jh. umfasst $100 \cdot 365 + 25 = 36\,525$ Tage, das 16. Jh. enthält $100 \cdot 365 + 25 - 10 = 36\,515$ Tage und das 17. Jh. $100 \cdot 365 + 24 = 36\,524$ Tage.

→ Abschnitt 5.2

Aufgabe 5.3

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle, in der die Säkularjahre *(→ Dies Dominica, 8.4)* angegeben werden, welche im Gregorianischen bzw. im Neujulianischen Kalender Schaltjahre sind.

Lösung 5.3

Tabelle 5.6
Säkularjahre, welche im Gregorianischen bzw. im Neujulianischen Kalender Schaltjahre sind

Gregorianischer Kalender	Neujulianischer Kalender
2000	2000
2400	2400
2800	2900
3200	3300
3600	3800
4000	4200
4400	4700
4800	5100
5200	5600
5600	6000

Aufgabe 5.4

→ Abschnitt 5.2

a. Der Neujulianische Kalender korrigiert den Julianischen. Wie viele Jahre dauert es im Mittel, bis die Korrektur einen vollen Tag ausmacht?

b. Ab welchem Säkularjahr beträgt die Differenz zwischen dem Gregorianischen und dem Neujulianischen Kalender stets mindestens einen Tag?

Lösung 5.4

a. In 900 Jahren werden 7 Tage korrigiert. Für einen Tag braucht es $\frac{900}{7} \approx 128.57$ Jahre.

b. Differenz der Jahreslängen: $365 + \frac{97}{400} - 365 - \frac{218}{900} = \frac{1}{3600}$ Tage.
Im Jahr 2000 stimmten die beiden Kalender überein. Ab dem Jahr 5600 $(= 2000 + 3600)$ beträgt die Differenz stets mindestens 1 Tag. Wie man Tabelle **??** entnimmt, gilt dies aber bereits ab dem Jahr 5200.

Aufgabe 5.5

→ Abschnitt 5.2

Sowohl der Gregorianische als auch der Neujulianische Kalender sind aus dem Bestreben entstanden, das Osterfest, welches im Julianischen Kalender zu spät gefeiert wurde, wieder auf den „richtigen" Platz zu bringen.

a. Bestimmen Sie für jeden der drei Kalender die Abweichung der mittleren Jahreslänge von der Länge des mittleren Äquinoktialjahres. (Das Äquinoktialjahr dauert im Mittel gegenwärtig 365.242363 d.) Geben Sie die Ergebnisse in Minuten und Sekunden (auf Zehntelssekunden genau) an.

b. Nehmen wir an, die Länge des Äquinoktialjahres sei konstant (365.242363 d). Wie viele Jahre dauert es, bis sich die Abweichung des betreffenden Kalenderjahres vom Äquinoktialjahr zu einem vollen Tag aufsummiert hat?

Lösung 5.5

a. Die Länge des mittleren Gregorianischen Jahres unterscheidet sich von derjenigen des Frühlings-Äquinoktialjahres um
$365.2425\,\mathrm{d} - 365.242363\,\mathrm{d} = 0.000137\,\mathrm{d} \approx 11.8\,\mathrm{s}$
Beim mittleren Neujulianischen Jahr beträgt die Abweichung
$365.242363\,\mathrm{d} - 365.242222\,\mathrm{d} = 0.000141\,\mathrm{d} \approx 12.2\,\mathrm{s}$

beim mittleren Julianischen Jahr
$365.25\,\mathrm{d} - 365.242363\,\mathrm{d} = 0.007637\,\mathrm{d} \approx 10\,\mathrm{m}\,59.8\,\mathrm{s}$

b. Beim Julianischen Kalender dauert es $1/0.007637 \approx 131$ Jahre, beim Gregorianischen Kalender $1/0.000137 \approx 7299$ Jahre und beim Neujulianischen $1/0.000141 \approx 7092$ Jahre.

→ Abschnitt 5.3

Aufgabe 5.6

Bestimmen Sie die Länge einer

- Revolutionsstunde,
- Revolutionsminute,
- Revolutionssekunde,

ausgedrückt in gewöhnlichen Stunden, Minuten und Sekunden.

Lösung 5.6

- 1 Revolutionsstunde $= \frac{24}{10}\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}\,24\,\mathrm{m}$
- 1 Revolutionsminute $= \frac{24}{1\,000}\,\mathrm{h} = \frac{144\,\mathrm{m}}{100} = 1\,\mathrm{m}\,26.4\,\mathrm{s}$
- 1 Revolutionssekunde $= \frac{24}{100\,000}\,\mathrm{h} = \frac{86.4\,\mathrm{s}}{100} = 0.864\,\mathrm{s}$

→ Abschnitt 5.3

Aufgabe 5.7

a. Welches Datum des Französischen Revolutionskalenders entspricht dem 20. September 1793 (Gregorianisch)? An diesem Tag stellte Romme den Französischen Revolutionskalender dem Konvent vor *(→ Abschnitt 5.3)*.

b. Welches Gregorianische Datum entspricht dem 19. Messidor VI? An diesem Tag wurde die Diskussion über den Kalender im Rat wieder aufgenommen *(→ Wissenswert: Feiertagsregelung im Französischen Revolutionskalender)*.

c. Wählen Sie ein Datum des Französischen Revolutionskalenders und bestimmen Sie das entsprechende Datum des Gregorianischen Kalenders.

Lösung 5.7

a. Der 1. Vendémaire I entspricht dem 22. Sep. 1792.
365 d später ist der 1. Vendémaire II bzw. der 22. Sep. 1793.
Der 20. Sep. 1793 entspricht somit dem 4. Tag der Sansculottides des Jahres I.

b. Der 1. Vendémaire I entspricht dem 22. Sep. 1792.
Fünf Jahre später ist der 1. Vendémaire VI, und dieses Datum entspricht dem 22. Sep. 1797, denn dazwischen hat es in beiden Kalendern genau einen Schalttag.
$9 \cdot 30 = 270$ d später ist der 1. Messidor VI und nochmals 18 Tage, also insgesamt 288 Tage später, ist der 19. Messidor VI. Vom 22. September 1797 bis zum 22. Juni 1798 sind es $(5 \cdot 31 + 3 \cdot 30 + 28)$ d $=$ 273 d und 15 Tage später ist der 7. Juli 1798. Der 19. Messidor VI entspricht also dem 7. Juli 1798.

c. Beispiel 1: 18. Brumaire VIII.
1. Vendémaire I entspricht dem 22. Sep. 1792.
$(7 \cdot 365 + 2)$ d später ist der 1. Vendémaire VIII (die Jahre III und VII des Französischen Revolutionskalender sind Schaltjahre) und dieses Datum entspricht dem 23. Sep. 1799 (nur das Jahr 1796 ist ein Schaltjahr).
30 d später ist der 1. Brumaire VIII und nochmals 17 d später ist der 18. Brumaire VI. 47 d nach dem 23. Sep. 1799 ist der 9. November 1799.

Beispiel 2: 11. Nivôse XIV
1. Vendémaire I entspricht dem 22. Sep. 1792.
$(13 \cdot 365 + 3)$ d später ist der 1. Vendémaire XIV und dieses Datum entspricht dem 23. Sep. 1805, da das Jahr 1800 kein Schaltjahr ist.
$(3 \cdot 30 + 10)$ d $= 100$ d später ist der 11. Nivôse XIV.
100 d nach dem 23. Sep. 1805 ist der 1. Januar 1806

Aufgabe 5.8

→ Abschnitt 5.4

Eine Zeitspanne von 12 synodischen Monaten dauert $12 \cdot 29.530588 \approx 354.367056$ Tage. Die Differenz zum Mondgemeinjahr von 354 Tagen beträgt also (gerundet) 0.367056 Tage. Entwickeln Sie diese Differenz in einen Kettenbruch. Bestimmen Sie die Näherungsbrüche der Ordnungen 0 bis 6 und ordnen Sie diese (aufsteigend) der Grösse nach *(→ Mathematische Hilfsmittel, 9.2)*. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Näherungsbrüchen und dem zyklischen Islamischen Kalender?

Lösung 5.8

$0.367056 = [0, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 4, 1, \ldots]$

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Ordnung} & 0 & 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ \text{Näherungsbruch} & \frac{0}{1} < & \frac{1}{3} < & \frac{4}{11} < & \frac{11}{30} < & \frac{7}{19} < & \frac{3}{8} < & \frac{1}{2} \end{array}$$

Der 30-jährige Zyklus entspricht dem Näherungsbruch 6. Ordnung. Interessant ist, dass der Näherungsbruch 5. Ordnung auf einen etwas weniger genauen 19-jährigen Zyklus mit 7 Mondschaltjahren hinweist!

→ Abschnitt 5.4

Aufgabe 5.9

Jeder Muslim erlebt, dass die religiösen Feste im Laufe seines Lebens zu verschiedenen Jahreszeiten stattfinden. Eine besondere Rolle spielt diese Tatsache beim Fastenmonat Ramadan, denn Fasten müssen die Muslime den ganzen lichten Tag lang. „*Zur Nacht des Fastens...*“ steht im Koran (Sure 2.187): „*... esset und trinket, bis ihr einen weissen Faden von einem schwarzen Faden in der Morgenröte unterscheidet. Alsdann haltet streng das Fasten bis zur Nacht...*“ [Kor91, S. 50]. Doch im Winter ist die Nacht viel länger als im Sommer und die Fastenzeit weniger streng.

a. Wir gehen davon aus, dass ein mittleres Islamisches Jahr $354 + \frac{11}{30}$ Tage dauert *(→ Formel 5.2)*. Nach wie vielen Islamischen Jahren tritt der Ramadan wieder ungefähr am selben Datum des Gregorianischen Kalenders ein?

b. Das Jahr 1441 der islamischen Zeitrechnung begann am 1. September 2019. Es war das erste Jahr eines 30-jährigen Zyklus. Der 1. Ramadan des Jahres 1441 fiel auf den 24. April 2020.
Berechnen Sie mit Hilfe des 30-jährigen Zyklus, wann der Ramadan in den nächsten Jahren (bzw. Jahrzehnten) voraussichtlich beginnen wird. Arbeiten Sie mit einem Tabellenkalkulationsprogramm und addieren Sie fortlaufend 354 bzw. 355 Tage, je nachdem, ob das Zyklusjahr einen Schalttag enthält oder nicht. Führen Sie Ihre Rechnungen so weit fort, bis der Beginn des Monats Ramadan wieder in die zweite Hälfte April fallen wird.

c. Vom 16. Juli 622 (Epoche der islamischen Zeitrechnung) *(→ Abschnitt 5.4)* bis zum Spätsommer 2019 sind 1440 islamische Jahre vergangen.

Berechnen Sie den Beginn des islamischen Jahres 1441 im *zyklischen* Islamischen Kalender.

Lösung 5.9

a. $365.2425/(365.2425-354.3\overline{6}) \approx 33.5829$ Jahre. Antwort: nach 33 oder 34 islamischen Jahren. Vgl. auch Teilaufgabe b.

b.

Zyklusjahr	islamisches Jahr	Anzahl Tage im Zyklusjahr	Gregorianisch
1	1441	354	24.04.2020
2	1442	355	13.04.2021
3	1443	354	03.04.2022
4	1444	354	23.03.2023
5	1445	355	11.03.2024
6	1446	354	01.03.2025
7	1447	355	18.02.2026
8	1448	354	08.02.2027
9	1449	354	28.01.2028
10	1450	355	16.01.2029
11	1451	354	06.01.2030
12	1452	354	26.12.2030
13	1453	355	15.12.2031
14	1454	354	04.12.2032
15	1455	354	23.11.2033
16	1456	355	12.11.2034
17	1457	354	02.11.2035
18	1458	355	21.10.2036

Zyklusjahr	islamisches Jahr	Anzahl Tage im Zyklusjahr	Gregorianisch
19	1459	354	11.10.2037
20	1460	354	30.09.2038
21	1461	355	19.09.2039
22	1462	354	08.09.2040
23	1463	354	28.08.2041
24	1464	355	17.08.2042
25	1465	354	07.08.2043
26	1466	355	26.07.2044
27	1467	354	16.07.2045
28	1468	354	05.07.2046
29	1469	355	24.06.2047
30	1470	354	13.06.2048
1	1471	354	02.06.2049
2	1472	355	22.05.2050
3	1473	354	12.05.2051
4	1474	354	30.04.2052
5	1475	355	19.04.2053
...	...	...	...

Bild 5.5 Beginn des Ramadan der islamischen Jahre 1441 bis 1475, berechnet nach dem 30-jährigen Zyklus.

Der Ramadan beginnt nach 33 islamischen bzw. 32 gregorianischen Jahren zum ersten Mal wieder im April. Nach 34 islamischen bzw. 33 gregorianischen Jahren fällt der Beginn des Ramadan zum zweiten Mal auf den April. Vgl. Sie die Lösung des Aufgabenteils a.

Beachten Sie, dass die berechneten Daten vom tatsächlichen Beginn des Ramadan um ein bis zwei Tage abweichen können, da der Monatsbeginn weiterhin auf der Beobachtung des Neulichts basiert und jegliche Berechnung dieser Daten nur Schätzungen sind.

c. 1440 islamische Jahre entsprechen 48 dreissigjährigen Zyklen, welche je 10 631 d enthalten *(→ Vertiefung: Der 30-jährige Zyklus)*. In Tagen ausgedrückt sind es: $48 \cdot 10\,631\,\text{d} = 510\,288\,\text{d}$.

Von 622 bis 2019 sind 1397 julianische Jahre vergangen. Das entspricht: $1396 \cdot 365.25\,\mathrm{d} + 365\,\mathrm{d} = 510\,254\,\mathrm{d}$. Bis zum 16. Juli 2019 des Julianischen Kalenders sind also 510 254 d vergangen.
Die 34 d Differenz zwischen 510 288 d und 510 254 d müssen addiert werden: Das zyklische islamische Jahr 1441 beginnt also am 19. August des Julianischen Kalenders. Um zum Gregorianischem Datum zu gelangen, müssen wir noch die 13 d addieren, welche den Gregorianischen vom Julianischen Kalender im Jahr 2019 unterscheiden *(→ Dies Dominica)*. Somit fällt – wie der tatsächliche – auch der nach dem zyklischen Kalender berechnete Beginn des islamischen Jahres 1441 auf den 1. September 2019.

6 Aufgaben zum Freitag

Aufgabe 6.1

→ Abschnitt 6.2, Tabelle 6.1

Berechnen Sie für die nachstehenden Daten der christlichen Zeitrechnung den Julianischen Tag. Für die Berechnung des Julianischen Tages wird angenommen, dass das Jahr 1 v. Chr. und alle Jahre j v. Chr., deren Jahreszahl j bei Division durch 4 den Rest 1 lässt, Schaltjahre waren. Da es in der christlichen Zeitrechnung kein Jahr 0 gibt, dauerte es vom 1. Januar 1 v. Chr. bis zum 1. Januar 4 n. Chr. nur vier Jahre bzw. 1461 Tage[6].

a. 16. November 626 v. Chr. (Inthronisation von Nabopolassar, des Begründers des Neubabylonischen Reichs)
b. 1. Oktober 312 v. Chr. (Epoche der Seleukidenära)
c. 11. April 532 n. Chr. (Osterdatum, aus der Ostertafel des Dionysius Exiguus *(→ Dies Dominica, 8.3)*
d. 1. August 1291 n. Chr. (Datum des Bundesbriefs, der sog. Gründungsurkunde der Schweizerischen Eidgenossenschaft)
e. 14. September 1752 n. Chr. (Einführung des Gregorianischen Kalenders in Grossbritannien)[7]
f. 12. September 1848 n. Chr. (Inkrafttreten der ersten Schweizerische Bundesverfassung)

6 Der Julianische Schaltzyklus, bestehend aus vier aufeinanderfolgenden Jahren des Julianischen Kalenders, enthält 1461 Tage.

7 Bei den Daten nach der Gregorianischen Reform ist zu beachten, dass im Jahr 1582 zehn Tage ausgelassen wurden und dass die Jahre 1700, 1800 und 1900 keine Schaltjahre waren.

Lösung 6.1

a. Vom 1.1.4713 v. Chr. bis zum 1.1.626 v. Chr. sind 4087 Jahre, also 1021 volle Schaltzyklen plus 2 Gemeinjahre plus ein Schaltjahr (629 v. Chr.) vergangen. Das sind $1021 \cdot 1461 + 2 \cdot 365 + 366 = 1\,492\,777$ Tage. Vom 1.1.626 bis zum 16.11.626 v. Chr. sind es $3 \cdot 30 + 6 \cdot 31 + 28 + 15 = 319$ Tage. Der Julianische Tag beträgt also $1\,492\,777 + 319 = 1\,493\,096$.
b. Vom 1.1.4713 v. Chr. bis zum 1.1.312 v. Chr. sind 4401 Jahre, also 1100 volle Schaltzyklen plus ein Schaltjahr (313 v. Chr.) vergangen. Das sind $1100 \cdot 1461 + 366 = 1\,607\,466$ Tage. Vom 1.1.312 bis zum 1.10.312 v. Chr. sind es $3 \cdot 30 + 5 \cdot 31 + 28 = 273$ Tage. Der Julianische Tag beträgt also 1 607 739.
c. Vom 1.1.4713 v. Chr. bis zum 1.1.532 n. Chr. sind $4713 + 532 - 1 = 5244$ Jahre, also genau 1311 volle Schaltzyklen vergangen. Das sind $1311 \cdot 1461 = 1\,915\,371$ Tage. Vom 1.1.532 bis zum 11.4.532

sind es $2 \cdot 31 + 29 + 10 = 101$ Tage. Der Julianische Tag beträgt also 1 915 472.

d. Vom 1.1.4713 v. Chr. bis zum 1.1.1291 n. Chr. sind $4713 + 1291 - 1 = 6003$ Jahre, also 1500 volle Schaltzyklen plus 2 Gemeinjahre plus ein Schaltjahr (1288) vergangen. Das sind $1500 \cdot 1461 + 2 \cdot 365 + 366 = 2\,192\,596$ Tage. Vom 1.1.1291 bis zum 1.8.1291 sind es $4 \cdot 31 + 2 \cdot 30 + 28 = 212$ Tage. Der Julianische Tag beträgt also 2 192 808.

e. Vom 1.1.4713 v. Chr. bis zum 14.9.1752 n. Chr. sind $4713 + 1752 - 1 = 6464$ Jahre vergangen. Das sind 1616 volle Schaltzyklen minus die ausgefallenen $10 + 1 = 11$ Tage, also $1616 \cdot 1461 - 11 = 2\,360\,965$ Tage. Vom 1.1.1752 bis zum 14.9.1752 sind es $5 \cdot 31 + 2 \cdot 30 + 29 + 13 = 257$ Tage. Der Julianische Tag beträgt somit 2 361 222.

f. Vom 1.1.4713 v. Chr. bis zum 1.1.1848 n. Chr. sind $4713 + 1848 - 1 = 6560$ Jahre vergangen. Das sind 1640 volle Schaltzyklen minus die ausgefallenen $10 + 2 = 12$ Tage, also $1640 \cdot 1461 - 12 = 2\,396\,028$ Tage. Vom 1.1.1848 bis zum 12.9.1848 sind es $257 - 2 = 255$ Tage. *(→ Vgl. Lösung e.)* Der Julianische Tag beträgt somit 2 396 283.

→ Abschnitt 6.2, Vertiefungen 6.4.1, 6.4.3

Aufgabe 6.2

In der Julianischen Ära hat das Jahr 1 v. Chr. die Jahreszahl 4713 und das Jahr 1 n. Chr die Jahreszahl 4714. (In der Christlichen Zeitrechnung gibt es kein Jahr 0.)
Bestimmen Sie für die folgenden Jahre (gegeben in der christlichen Zeitrechnung) zunächst die Jahreszahl in der Julianischen Ära und dann den Sonnenzirkel, die Goldene Zahl und die Römerzinszahl.

a. 625 v. Chr. (Nabopolassars erstes Regierungsjahr)
b. 312 v. Chr. (Beginn der Seleukidenära)
c. 284 n. Chr. (Epoche der Koptischen Zeitrechnung)
d. 532 n. Chr. (Einführung der christlichen Zeitrechnung durch Dionysius Exiguus)
e. 622 n. Chr. (Hidschra)
f. 1079 n. Chr. (Epoche der Zeitrechnung des Malik Schah)
g. 1582 n. Chr. (Einführung des Gregorianischen Kalenders)

Lösung 6.2

a. $4713 - 624 = 4089$; $\zeta = 4089 \bmod 28 = 1$, $\gamma = 4089 \bmod 19 = 4$, $\rho = 4089 \bmod 15 = 9$

b. $4713 - 311 = 4402$; $\zeta = 4402 \bmod 28 = 6$, $\gamma = 4402 \bmod 19 = 13$, $\rho = 4402 \bmod 15 = 7$

c. $4713 + 284 = 4997$; $\zeta = 4997 \bmod 28 = 13$, $\gamma = 19$ $(4997 \bmod 19 = 0)$, $\rho = 4997 \bmod 15 = 2$

d. $4713 + 532 = 5245$; $\zeta = 5245 \bmod 28 = 9$, $\gamma = 5245 \bmod 19 = 1$, $\rho = 5245 \bmod 15 = 10$

e. $4713 + 622 = 5335$; $\zeta = 5335 \bmod 28 = 15$, $\gamma = 5335 \bmod 19 = 15$, $\rho = 5335 \bmod 15 = 10$

f. $4713 + 1079 = 5792$; $\zeta = 5792 \bmod 28 = 24$, $\gamma = 5792 \bmod 19 = 16$, $\rho = 5792 \bmod 15 = 2$

g. $4713 + 1582 = 6295$; $\zeta = 6295 \bmod 28 = 23$, $\gamma = 6295 \bmod 19 = 6$, $\rho = 6295 \bmod 15 = 10$

Aufgabe 6.3

→ Vertiefung 6.4.1, Formel 6.1, Tabellen 6.3, 6.4

a. Bestimmen Sie für die Jahre 1427, 1435, 1444 und 1454 der christlichen Zeitrechnung den Sonnenzirkel und den Sonntagsbuchstaben.

b. Wir betrachten den Sonnenzyklus, der das Jahr 1444 n. Chr. enthält. Welche Jahre in diesem Zyklus haben die Sonntagsbuchstaben A, C, FE, BA?

c. Die Schlacht von St. Jakob an der Birs fand am 26. August 1444 statt. An welchem Wochentag war das?

Lösung 6.3

a. $\zeta(1427) = 8$ mit dem Sonntagsbuchstaben E, $\zeta(1435) = 16$ mit B, $\zeta(1444) = 25$ mit ED, $\zeta(1454) = 7$ mit F

b. Dieser Zyklus beginnt im Jahr 1420. Die Jahre 1430, 1441 und 1447 haben den Sonntagsbuchstaben A; die Jahre 1423, 1434, 1445 haben C; 1432 hat FE; 1424 hat BA.

c. 1444 hat den Sonntagsbuchstaben ED. Nach Tabelle 6.3 ist dann der 23. August ein Sonntag. Die Schlacht fand also an einem Mittwoch statt.

→ Vertiefung 6.4.1,
Tabellen 6.3, 6.5

Aufgabe 6.4

a. Welches sind die Gregorianischen Sonntagsbuchstaben der Jahre 2025, 2032 und 2037?

b. Bestimmen Sie nun die Wochentage der folgenden Daten:
   - 24. Februar 2025
   - 20. Juni 2025
   - 3. Januar 2032
   - 29. Februar 2032
   - 1. April 2032
   - 28. Oktober 2037
   - 6. Dezember 2037

Lösung 6.4

a. 2025 hat den Gregorianischen Sonntagsbuchstaben E, 2032 hat DC, 2037 hat D.

b.
   - Montag
   - Freitag
   - Samstag
   - Sonntag
   - Donnerstag
   - Mittwoch
   - Sonntag

→ Vertiefung 6.4.1,
Tabellen 6.3, 6.5

Aufgabe 6.5

a. Das Gemeinjahr j im 18. Jahrhundert hat den Gregorianischen Sonntagsbuchstaben F und das Jahr $j+2$ den Buchstaben C. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von j.

b. In welchen Jahren zwischen 1830 und 1870 war der 6. November des Gregorianischen Kalenders ein Dienstag?

c. In welchen Jahren zwischen 1830 und 1870 war der 6. November des Julianischen Kalenders ein Dienstag?

Lösung 6.5

a. Kleinster Wert für j ist 1715. Hinzu kommen die Jahre 1743 und 1771(in Abständen von 28 Jahren). 1799 geht nicht, da 1801 den Buchstaben D hat. Somit: $j = 1715 + k \cdot 28$, wobei $0 \le k \le 2$.

b. Der 6. November hat den Tagesbuchstaben B und ist folglich ein Dienstag in allen Gregorianischen Gemeinjahren mit dem Sonntagsbuchstaben G und in allen Gregorianischen Schaltjahren mit dem Doppelbuchstaben AG. Im betrachteten Zeitraum sind das die Jahre 1832, 1838, 1849, 1855, 1860, 1866

c. In allen Julianischen Gemeinjahren mit dem Sonntagsbuchstaben G und in allen Julianischen Schaltjahren mit dem Doppelbuchstaben AG. Das sind die Jahre mit $\zeta = 6, 12, 17, 23$ im 28-jährigen Sonnenzyklus.
Es gilt: $\zeta(1812) = \zeta(1840) = 1$. Also war der 6. November ein Dienstag in den Jahren $1834 = 1812 - 1 + 23$, $1845 = 1840 - 1 + 6$, $1851 = 1840 - 1 + 12$, $1856 = 1840 - 1 + 17$ und $1862 = 1840 - 1 + 23$.

Aufgabe 6.6

→ Vertiefung 6.4.1, Tabellen 6.3, 6.5

Der italienische Komponist Gioacchino Rossini wurde am Mittwoch, 29. Februar 1792 geboren und starb am Freitag, 13. November 1868.

a. In welchen Jahren hatte Rossini an einem Mittwoch Geburtstag?
b. In welchen Jahren hatte er an einem Sonntag Geburtstag?

Lösung 6.6

a. Es sind dies die Schaltjahre mit dem Doppelbuchstaben AG: 1792, 1804, 1832, 1860.
b. Es sind dies die Schaltjahre mit dem Doppelbuchstaben DC: 1824, 1852.

Aufgabe 6.7

→ Vertiefung 6.4.1, Tabellen 6.3, 6.5

Jemand behauptet, dass der 29. Februar häufiger auf einen Mittwoch als auf einen Sonntag falle. Inwiefern ist diese Aussage korrekt? Argumentieren Sie mit Hilfe der Tabellen 6.3 und 6.5.

Lösung 6.7

Die Aussage ist korrekt, wenn man sich auf einen vollen 400-jährigen Gregorianischen Sonnenzyklus bezieht. Der 29. Februar hat den Tagesbuchstaben D. Er fällt auf einen Sonntag, falls das betreffende Schaltjahr den Doppelbuchstaben DC hat. Dies trifft innerhalb eines 400-jährigen Zyklus genau 13mal ein. (Dafür zählt man die Einträge in Tabelle 6.5.) Der 29. Februar fällt auf einen Mittwoch, falls der Sonntagsbuchstabe AG ist, was im 400-jährigen Zyklus 15mal eintrifft.

→ Vertiefung 6.4.1, Tabelle 6.5

Aufgabe 6.8

Ein Julianisches oder Gregorianisches Gemeinjahr enthält 52 Wochen plus 1 Tag, ein Schaltjahr 52 Wochen plus 2 Tage. Jedes solche Kalenderjahr enthält somit 52 oder 53 Samstage[8].

a. Charakterisieren Sie mit Hilfe der Sonntagsbuchstaben diejenigen Kalenderjahre, welche 53 Samstage enthalten.
b. Welche Kalenderjahre von 2001 bis und mit 2050 enthalten 53 Samstage?

8 Dies gilt übrigens für alle Wochentage.

Lösung 6.8

a. Damit ein Gemeinjahr 53 Samstage enthalten kann, muss es mit einem Samstag beginnen: Sonntagsbuchstabe B. Damit ein Schaltjahr 53 Samstage hat, muss es mit einem Freitag oder einem Samstag beginnen: Doppelbuchstabe BA oder CB.
b. 2005, 2011, 2016, 2022, 2028, 2033, 2039, 2044, 2050.

→ Vertiefung 6.4.3

Aufgabe 6.9

Die Zahl $\kappa(j)$ gibt die Position des Jahres j in einem 17-jährigen Zyklus an. Man weiss, dass das Jahr 724 ein 8. Zyklusjahr war. Bestimmen Sie eine Formel für $\kappa(j)$.

Lösung 6.9

Das Jahr 716 war ein 17. Zyklusjahr.

$\kappa(j) = 1 + (j - 700) \bmod 17 = 1 + (j - 3) \bmod 17 = 1 + (j + 14) \bmod 17$

Verwendet haben wir, dass $697 \bmod 17 = 0$ ist.

7 Aufgaben zum Samstag

Aufgabe 7.1 → Abschnitt 7.2

Es ist nicht bekannt, ob der Altjüdische Sonnenkalender eine Schaltregel enthielt.

a. Falls nicht geschaltet wurde, war das altjüdische 364-Tage-Jahr ein Wandeljahr. Wie viele altjüdische Sonnenjahre dauert es in diesem Fall, bis der Jahresbeginn einmal durch alle Jahreszeiten, also z.B. vom Herbstäquinoktium zum Herbstäquinoktium gewandert ist? Nehmen Sie für die Länge des tropischen Jahres 365.242474 Tage an. (Gerechnet nach [Hey06] für das Jahr 200 v. Chr.)
b. Falls tatsächlich geschaltet wurde, ist anzunehmen, dass ganze Schaltwochen eingefügt wurden. In welchem Rhythmus könnte eine solche Schaltung erfolgen, wenn man den Gleichlauf
   - mit dem Altägyptischen Sonnenkalender *(→ Sonntag, 1.4.1)*
   - mit dem Julianischen Kalender *(→ Sonntag, 1.4.2)*

   erreichen wollte?

Lösung 7.1

a. Gegenüber dem tropischen Jahr bewirkt das altjüdische Sonnenjahr eine Differenz von $365.242474 - 364 = 1.242474$ Tagen.

   Es dauert also $\frac{365.242474}{1.242474} \approx 294$ altjüdische Sonnenjahre, bis der Jahresbeginn durch alle Jahreszeiten gewandert ist.
b.
   - Das altägyptische Jahr dauert 365 Tage. Es müsste alle 7 Jahre eine Schaltwoche eingefügt werden.
   - Ein 4-jähriger Julianischer Schaltzyklus enthält 5 Tage mehr als 4 altjüdische Gemeinjahre. Es braucht 7 solche Zyklen, bis die aufsummierte Differenz ein Vielfaches von 7 ist. D.h., innerhalb von 28 Jahren müssen 5 Schaltwochen eingefügt werden. Nach der kanonischen Verteilung von Schaltungen *(→ Mathematische Hilfsmittel, 9.3.1)* könnte dies im 6., 12., 17., 23. und 28. Jahr eines 28-jährigen Zyklus erfolgen.

Aufgabe 7.2 → Abschnitt 7.2

Die Epoche der Jüdischen Zeitrechnung ist die Erschaffung der Welt, welche nach jüdischer Vorstellung im Julianischen Kalender auf den 6. Oktober des Jahres 3761 v. Chr. fiel *(→ Mittwoch, 4.3.3)*.

a. Es ist bekannt, dass das Jahr 164/163 v. Chr. *(→ Fussnote 5)* ein Sabbatjahr war. Zeigen Sie, dass das 7. Jahr der Jüdischen Zeitrechnung ebenfalls ein Sabbatjahr war.
b. Nach der Chronologie des Jubiläenbuchs dauerte der Zeitraum zwischen Schöpfung und Landnahme *(→ Fussnote 7)* genau 50 Jubiläen. In welchem vorchristlichen Jahrhundert wäre nach dieser Chronologie die Landnahme anzusetzen?

Lösung 7.2

a. Das siebte Jahr der Jüdischen Zeitrechnung ist im Julianischen Kalender das Jahr 3755/3754 v. Chr. (Beachten Sie, dass das Jahr 3761/3760 v. Chr. nicht das nullte, sondern das erste Jahr der Jüdischen Zeitrechnung ist.) Es gilt $(3755 - 164) \bmod 7 = 0$. Also war auch das Jahr 3755/3754 v. Chr. ein Sabbatjahr.
b. Ein Jubiläum dauert 49 Jahre. Die Landnahme wäre $50 \cdot 49 = 2450$ Jahre später gewesen, d.h. um 1311 v. Chr. Sollten die 50 Jubiläen inklusiv *(→ Aufgaben zum Sonntag, Fussnote 1)* zu verstehen sein, so hätte die Landnahme nur $49 \cdot 49 = 2401$ Jahre später, also um 1360 v. Chr. stattgefunden. Beide Jahre gehören zum 14. vorchristlichen Jahrhundert.

→ Abschnitt 7.4

Aufgabe 7.3

a. Bestimmen Sie für die Gregorianischen Jahre 2023–2032 mit Hilfe der Sonntagsbuchstaben *(→ Freitag, Tabelle 6.5)* das Datum des ersten Donnerstags des Jahres, sowie das Datum des ISO-Jahresbeginns.
b. Bestimmen Sie – als Alternative zum Vorgehen in der Vertiefung 7.5.1 – die Anzahl ISO-Schaltjahre in einem 400-jährigen Zyklus mit Hilfe der Differenz zwischen der mittleren Länge eines Gregorianischen Jahres (365.2425 d) und der Länge eines ISO-Gemeinjahres.

Lösung 7.3

a. Die Lösung erscheint in der Form einer Tabelle:

Jahr	Sonntags-buchstabe	Erster Sonntag des Jahres	Erster Donnerstag des Jahres	Beginn des ISO-Jahres
2023	A	1. Januar	5. Januar	02.01.2023
2024	GF	7. Januar	4. Januar	01.01.2024
2025	E	5. Januar	2. Januar	30.12.2024
2026	D	4. Januar	1. Januar	29.12.2025
2027	C	3. Januar	7. Januar	04.01.2027
2028	BA	2. Januar	6. Januar	03.01.2028
2029	G	7. Januar	4. Januar	01.01.2029
2030	F	6. Januar	3. Januar	31.12.2029
2031	E	5. Januar	2. Januar	30.12.2030
2032	DC	4. Januar	1. Januar	29.12.2031

Tabelle 7.7 Datum des ISO-Jahresbeginns

b. Ein ISO-Gemeinjahr dauert 364 d; die Differenz beträgt also 1.2425 d. In 400 Jahren entsteht damit ein Überschuss von $400 \cdot 1.2425\,\mathrm{d} = 497\,\mathrm{d}$. Dieser Überschuss besteht aus den zusätzlichen Tagen, welche die ISO-Schaltwochen beitragen. Also enthält ein 400-jähriger Zyklus $497 : 7 = 71$ ISO-Schaltjahre.

Aufgabe 7.4

→ Abschnitt 7.4

Nach dem Kalendervorschlag von Hanke und Henry beginnt jedes Jahr an einem Sonntag. An welchem Gregorianischen Datum beginnt ein solches Jahr frühestens? An welchem Datum spätestens?

Lösung 7.4

Die erste Woche des Hanke-Henry-Jahres enthält den ersten Donnerstag im Januar des Gregorianischen Kalenders. Das Hanke-Henry-Jahr beginnt frühestens am gregorianischen 28. Dezember, nämlich dann, wenn das Gregorianische Jahr an einem Donnerstag beginnt. Es beginnt spätestens am gregorianischen 3. Januar und zwar dann, wenn das Gregorianische Jahr an einem Freitag beginnt.

Aufgabe 7.5

→ Vertiefung 7.5.1, Tabelle 6.5

a. Ein Jahr des ISO-Wochenkalenders ist genau dann ein Schaltjahr, wenn sein Sonntagsbuchstabe D, DC oder ED ist *(→ Tabelle 7.7)*. Ermitteln Sie die ISO-Schaltjahre für die folgenden Zeitintervalle:
   i. für das 28-jährige Intervall, welches im Jahr 2052 beginnen und 2079 enden wird;
   ii. für das 40-jährige Intervall, das im Jahr 1872 begann und bis 1911 dauerte;

iii. für das 40-jährige Intervall, das im Jahr 2080 beginnen und 2119 enden wird.

b. In welchen der drei betrachteten Zeitintervalle war die Verteilung der Schaltungen möglichst gleichmässig? *(→ Mathematische Hilfsmittel, 9.3.2)*

Lösung 7.5

a. i. 2054, 2060, 2065, 2071, 2076

ii. 1874, 1880, 1885, 1891, 1896, 1903, 1908

iii. 2082, 2088, 2093, 2099, 2105, 2111, 2116

b. i. Die Verteilung der Schaltungen im betreffenden 28-jährigen Zeitintervall ist gegeben durch $3 \le 9 \le 14 \le 20 \le 25$. Die Differenzenfolge ist somit (6, 6, 5, 6, 5), also genau gleich wie bei der kanonischen Verteilung $6 \le 12 \le 17 \le 23 \le 28$. Die gegebene Verteilung ist somit möglichst gleichmässig mit Indexverschiebung $d = 0$ und Zeitverschiebung um $v = 3$ Jahre.

ii. Die kanonische Verteilung von 7 Schaltungen in 40 Jahren ist $6 \le 12 \le 18 \le 23 \le 29 \le 35 \le 40$. Demgegenüber sieht die Verteilung im 40-jährigen Intervall von 1872 bis 1911 wie folgt aus: $3 \le 9 \le 14 \le 20 \le 25 \le 32 \le 37$. Bei der kanonischen Verteilung dauert es von einer Schaltung zur nächsten maximal 6 Jahre. Im betrachteten Zyklus beträgt die Dauer zwischen den Schaltjahren 1896 bis 1903 hingegen 7 Jahre. Also kann die Verteilung der Schaltungen *nicht* möglichst gleichmässig sein.

iii. Im 40-jährigen Intervall von 2080 bis 2119 lautet die Verteilung $3 \le 9 \le 14 \le 20 \le 26 \le 32 \le 37$. Die Differenzenfolge ist also (6, 6, 5, 6, 6, 6, 5), während die kanonische Verteilung die Differenzenfolge (6, 6, 6, 5, 6, 6, 5) besitzt. Also ist die gegebene Verteilung möglichst gleichmässig mit Zeitverschiebung um 26 Jahre und Indexverschiebung $d = 4$.

→ Abschnitt 7.4, Vertiefung 7.5.2

Aufgabe 7.6

Zu seinen Kalendern *Symmetry010* und *Symmetry454* gibt Bromberg einen Schaltzyklus von 293 Jahren mit zwei Unterzyklen von 45 bzw. 79 Jahren an.

a. Berechnen Sie für den Schaltzyklus und die beiden Unterzyklen je die mittlere Länge des Kalenderjahres und vergleichen

Sie diese Längen mit der mittleren Dauer des Äquinoktialjahres (365.242363 d, → *Dienstag, 3.3.2*).

b. Die Differenz zwischen der Länge des mittleren Äquinoktialjahres und derjenigen des 364-Tage-Jahres beträgt $365.242363 - 364 = 1.242363$ Tage pro Jahr. Für die exakte Angleichung des Brombergschen Kalenders an das mittlere Äquinoktialjahr müsste im Mittel nach $\frac{7}{1.242363}$ Jahren eine Schaltwoche eingefügt werden. Für die Bestimmung von Schaltzyklen kann die Kettenbruchentwicklung der Zahl $\frac{7}{1.242363}$ verwendet werden (→ *Mathematische Hilfsmittel, 9.2)*. Z.B. sind $\frac{45}{8}$ und $\frac{293}{52}$ Näherungsbrüche, welche sowohl den 45-jährigen als auch den 293-jährigen Zyklus bestätigen.
Bestimmen Sie mit Hilfe der Näherungsbrüche dieses Kettenbruchs zwei weitere mögliche Zyklen, welche kürzer als 293 Jahre sind und welche das mittlere Äquinoktialjahr besser approximieren als der 79-jährige Zyklus.

Lösung 7.6

a.
- 52 Schaltwochen in 293 Jahren: Die mittlere Länge beträgt
  $\left(364 + \frac{52 \cdot 7}{293}\right)\,\mathrm{d} \approx 365.242321\,\mathrm{d} < 365.242363\,\mathrm{d}$
  Differenz $\approx -4.2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{d} \approx -3.6\,\mathrm{s}$.
- 8 Schaltwochen in 45 Jahren: Die mittlere Länge beträgt
  $\left(364 + \frac{8 \cdot 7}{45}\right)\,\mathrm{d} = 365.2\overline{4}\,\mathrm{d} > 365.242363\,\mathrm{d}$
  Differenz $\approx 0.002081\,\mathrm{d} \approx 2\,\mathrm{m}\;59.8\,\mathrm{s}$
- 14 Schaltwochen in 79 Jahren: Die mittlere Länge beträgt
  $\left(364 + \frac{14 \cdot 7}{79}\right)\,\mathrm{d} \approx 365.240506\,\mathrm{d} < 365.242363\,\mathrm{d}$
  Differenz $\approx -0.001857\,\mathrm{d} \approx -2\,\mathrm{m}\;40.4\,\mathrm{s}$

Die Kombination der drei zu langen 45-jährigen Zyklen mit den zwei zu kurzen 79-jährigen Zyklen führt zum aktuell ziemlich genauen 293-jährigen Zyklus.

b. Es gilt $\frac{7}{1.242363} = [5, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 6, 1, \ldots]$

Ordnung	0		2		4		6		7		5		3		1
Näherungsbruch	$\frac{5}{1}$	$<$	$\frac{11}{2}$	$<$	$\frac{45}{8}$	$<$	$\frac{231}{41}$	$<$	$\frac{293}{52}$	$<$	$\frac{62}{11}$	$<$	$\frac{17}{3}$	$<$	$\frac{6}{1}$

Der 4. Näherungbruch entspricht dem 45-jährigen, der 7. Näherungbruch dem 293-jährigen Schaltzyklus. Der 5. Näherungbruch

liefert einen 62-jährigen Zyklus mit 11 Schaltwochen, der 6. Näherungbruch einen 231-jährigen Zyklus mit 41 Schaltwochen.
Die beiden letzteren Zyklen approximieren das mittlere Äquinoktialjahr besser als der 79-jährige Zyklus:

$\left(364 + \frac{11\cdot 7}{62}\right)\,\mathrm{d} \approx 365.241935\,\mathrm{d}$, Differenz $\approx -0.000428\,\mathrm{d} \approx -37.0\,\mathrm{s}$

$\left(364 + \frac{41\cdot 7}{231}\right)\,\mathrm{d} = 365.\overline{24}\,\mathrm{d}$, Differenz $\approx 6.1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{d} \approx 5.3\,\mathrm{s}$

→ Abschnitt 7.5.2

Aufgabe 7.7

Die Verteilung der Schaltjahre *(→ Mathematische Hilfsmittel, 9.3)* in den Unterzyklen des Brombergschen 293-jährigen Zyklus kann der Tabelle 7.9 entnommen werden.

a. Geben Sie die Verteilung der Schaltjahre im 45-jährigen Unterzyklus an.
b. Wie lautet die Verteilung der Schaltjahre im 79-jährigen Unterzyklus?
c. Vergleichen Sie diese Verteilungen mit den entsprechenden *kanonischen* Verteilungen. Sind diese Verteilungen *möglichst gleichmässig*?

Lösung 7.7

a. $3 \le 9 \le 15 \le 20 \le 26 \le 31 \le 37 \le 43$

b. $3 \le 9 \le 15 \le 20 \le 26 \le 32 \le 37 \le 43 \le 48 \le 54 \le 60 \le 65 \le 71 \le 77$

c.
- Die kanonische Verteilung von 8 Schaltungen auf 45 Zeiteinheiten wird beschrieben durch die Folge $6 \le 12 \le 17 \le 23 \le 29 \le 34 \le 40 \le 45$. Ihre Differenzenfolge beträgt (6, 6, 5, 6, 6, 5, 6, 5), während die Differenzenzenfolge der Brombergschen Verteilung (5, 6, 6, 5, 6, 5, 6, 6) lautet. Also ist die Brombergsche Verteilung von 8 Schaltungen auf 45 Jahre möglichst gleichmässig mit Zeitverschiebung um $v = 14$ Jahre und Indexverschiebung $d = 2$.
- Bei 14 Schaltungen in 79 Jahren ist die kanonische Verteilung gegeben durch $6 \le 12 \le 17 \le 23 \le 29 \le 34 \le 40 \le 46 \le 51 \le 57 \le 63 \le 68 \le 74 \le 79$. Ihre Differenzenfolge beträgt (6, 6, 5, 6, 6, 5, 6, 6, 5, 6, 6, 5, 6, 5), während die Differenzenzenfolge der Brombergschen Verteilung (5, 6, 6, 5, 6, 6, 5, 6, 5, 6, 6, 5, 6, 6) lautet. Also ist die Brombergsche Verteilung von 14 Schaltungen auf 79 Jahre ebenfalls möglichst gleichmässig, mit Zeitverschiebung um $v = 31$ Jahre und Indexverschiebung $d = 5$.

8 Aufgaben zum Dies Dominica

Aufgabe 8.1

Wir betrachten den 19-jährigen Zyklus des Jüdischen Kalenders, der mit dem Jahr 5777 beginnt. Bestimmen Sie für einige Jahre dieses Zyklus den Wochentag und das Gregorianische Datum des 15. Nissan (Beginn des jüdischen Passah-Festes).

→ Abschnitt 8.1, Tabellen 4.2 und 4.5

Lösung 8.1

Nach Tabelle 4.2 dauert es vom 15. Nissan bis zum 1. Tischri des Folgejahres stets 163 Tage. Nach *(→ Tabelle 4.5)* war der 1. Tischri 5778 am 5. Wochentag, gregorianisch am 21.09.2017. Der 15. Nissan 5777 war folglich 163 Tage früher am 3. Wochentag (163 mod 7 = 2), gregorianisch am 11.04.2017. Analog berechnet man die weiteren gregorianischen Daten des 15. Nissan in diesem Zyklus *(→ Tabelle 8.8)*.

Jüdisches Jahr	Wochentag	Datum
5777	Dienstag	11.04.2017
5778	Samstag	31.03.2018
5779	Samstag	20.04.2019
5780	Donnerstag	09.04.2020
5781	Sonntag	28.03.2021
5782	Samstag	16.04.2022
5783	Donnerstag	06.04.2023
5784	Dienstag	23.04.2024
5785	Sonntag	13.04.2025
5786	Donnerstag	02.04.2026
5787	Donnerstag	22.04.2027
5788	Dienstag	11.04.2028
5789	Samstag	31.03.2029
5790	Donnerstag	18.04.2030
5791	Dienstag	08.04.2031
5792	Samstag	27.03.2032
5793	Donnerstag	14.04.2033
5794	Dienstag	04.04.2034
5795	Dienstag	24.04.2035

Tabelle 8.8 15. Nissan im Gregorianischen Kalender

Für das letzte Zyklusjahr wurde verwendet, dass der 15. Nissan in einem überzähligen embolistischen Mondjahr 222 Tage nach dem 1. Tischri eintritt. Beachten Sie, dass der 15. Nissan jeweils am Vorabend beginnt.

→ Abschnitt 8.1, Tabelle 3.2

Aufgabe 8.2

Im Jahr 2020 trat das Frühlingsäquinoktium am 20. März um 4:49:58 Uhr (MEZ) ein. Die mittlere Dauer des Äquinoktialjahres (bezogen auf das Jahr 2000) beträgt 365.242363 d ≈ 365 d 5 h 49 m 0.2 s *(→ Dienstag, 3.3.2)*. Rechnen Sie im Folgenden stets mit diesem Mittelwert.

a. Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Frühlingsäquinoktiums in den Jahren 2021, 2022 und 2023.
b. Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Frühlingsäquinoktiums im Jahr 2024. Beachten Sie dabei, dass 2024 ein Schaltjahr ist.
c. Bestimmen Sie um wie viele Stunden, Minuten und Sekunden sich das Frühlingsäquinoktium innert vier Jahren verschiebt.
d. Wie viele vierjährige Schaltperioden braucht es, bis die Differenz zwischen den Frühlingsäquinoktien der Schaltjahre 4 h 49 m 58 s übersteigt und somit ein Datumswechsel stattfindet?
e. In welchem Schaltjahr des 21. Jahrhunderts wird das Äquinoktium zum ersten Mal am 19. März stattfinden?
f. In welchem Gemeinjahr des 21. Jh. wird das Äquinoktium zum ersten Mal am 19. März eintreten?
g. Bestimmen Sie den genauen Zeitpunkt des Frühlingsäquinoktiums in den Jahren 2102 und 6892. (Ob der Gregorianische Kalender im siebten Jahrtausend noch in Gebrauch sein wird, bleibe dahingestellt und die Variabilität des obigen Mittelwerts soll hier auch nicht berücksichtigt werden.)

Lösung 8.2

a. 20. März 2021 um 10:38:58.2 Uhr, 20. März 2022 um 16:27:58.4 Uhr, 20. März 2023 um 22:16:58.6 Uhr
b. 20. März 2024 um 04:05:58.8 Uhr
c. Vier Jahre später tritt das Äquinoktium 43 m 59.2 s früher ein. Bemerkung: Falls der Schalttag ausfällt (z.B. 2100), tritt das Äquinoktium 24 h – 43 m 59.2 s = 23 h 16 m 0.8 s später ein.

d. $4\,\text{h}\ 49\,\text{m}\ 58\text{s} = 17\,398\,\text{s}, 43\,\text{m}\ 59.2\,\text{s} = 2639.2\,\text{s}; 17\,398/2639.2 \approx 6.59$. Es braucht sieben vierjährige Schaltperioden, bis die Differenz $4\,\text{h}\ 49\,\text{m}\ 58\,\text{s}$ übersteigt.

e. Nach Teilaufgabe d. erfolgt der erste Datumswechsel nach sieben Schaltperioden, also im Jahr 2048. Die Abnahme beträgt bis dann $7 \cdot 2639.2\,\text{s} = 18\,474.4\,\text{s} = 5\,\text{h}\ 07\,\text{m}\ 54.4\,\text{s}$. Im Jahr 2048 ist das Frühlingsäquinoktium somit $5\,\text{h}\ 07\,\text{m}\ 54.4\,\text{s} - 4\,\text{h}\ 49\,\text{m}\ 58\,\text{s} = 17\,\text{m}\ 56.4\,\text{s}$ vor Mitternacht, also am 19. März um 23:42:03.6 Uhr.

f. Dies wird in einem Gemeinjahr j mit $j \bmod 4 = 1$ erfolgen. Nach Teilaufgabe e. wird das Äquinoktium im Jahr 2049 am 20. März um 05:31:03.8 eintreten ($5\,\text{h}\ 31\,\text{m}\ 03.8\,\text{s} = 19\,863.8\,\text{s}$). Vier Jahre später tritt das Äquinoktium gemäss Teilaufgabe c. um $43\,\text{m}\ 59.2\,\text{s} = 2639.2\,\text{s}$ früher ein. Wegen $19\,863.8/2639.2 \approx 7.53$ braucht es von 2049 an 8 Schaltperioden, also 32 Jahre, bis das Äquinoktium in einem Gemeinjahr zum ersten Mal am 19. März eintritt. Dies wird im Jahr 2081 geschehen und zwar $20\,\text{m}\ 49.8\,\text{s}$ vor Mitternacht, d.h. um 23:39:10.2.

g. Da der Schalttag im Jahr 2100 ausfällt, besteht das Intervall von 2020 bis 2102 aus 19 Vierjahresperioden und 6 Gemeinjahren. Nach Teilaufgabe d. ergibt das eine Zunahme von

$$19 \cdot (-2639.2)\,\text{s} + 6 \cdot 20\,940.2\,\text{s} = 75\,496.4\,\text{s} = 20\,\text{h}\ 58\,\text{m}\ 16.4\,\text{s}$$

Dabei ist 20 940.2 Sekunden der Tagesbruchteil von 365.242363 d. Im Jahr 2102 ist das Frühlingsäquinoktium folglich am 21. März um 01:48:14.4 Uhr. Das Intervall von 2020 bis 6892 besteht aus 1219 Vierjahresperioden, wobei der Schalttag 36mal ausfällt. Das ergibt eine Abnahme von

$$1219 \cdot 2639.2\,\text{s} - 36 \cdot 86\,400\,\text{s} = 104145.6\,\text{s} = 28\,\text{h}\ 55\,\text{m}\ 45.6\,\text{s}$$

Im Jahr 6892 ist das Frühlingsäquinoktium folglich am 18. März um 23:54:12.4 Uhr.

Aufgabe 8.3

→ Abschnitt 8.2

Ein kanonischer Alexandrinischer Zyklus enthält 12 Mondgemeinjahre und 7 embolistische Mondjahre. Wir nehmen hier an, dass ein solches Mondjahr stets mit dem Ostermonat beginnt.

a. Wie erkennt man aus Tabelle 8.1, dass das Mondjahr, welches im zweiten Zyklusjahr beginnt, embolistisch ist?

b. Bestimmen Sie mindestens zwei weitere Zyklusjahre, in denen embolistische Mondjahre beginnen.

Lösung 8.3

a. Das im zweiten Zyklusjahr beginnende Mondjahr, fängt 13 Tage vor der Ostergrenze an, also an einem 12. März, das Folgejahr am 31. März *(→ Tabelle 8.1)*. Das Mondjahr ist somit 19 Tage länger als das Sonnenjahr und hat folglich 384 oder 385 Tage, ist also embolistisch.
b. Auf analoge Weise wird gezeigt, dass die Mondjahre, welche im 5., 7., 10., 13., 16., und 18. Zyklusjahr beginnen, embolistisch sind.

→ Abschnitte 8.2, 8.4, Tabelle 8.12

Aufgabe 8.4

Das Osterdatum der Ostkirche berechnet sich immer noch nach dem Julianischen Kalender und dem Alexandrinischen Osterzyklus *(→ Abschnitt 8.2)*. Mit Hilfe der Goldenen Zahl und von Tabelle 8.1 kann man die orthodoxe Ostergrenze im Julianischen Kalender für ein beliebiges Jahr bestimmen.
Ermitteln Sie die Ostergrenze und das Osterdatum der Ostkirche im Gregorianischen Kalender für einige Jahre des gegenwärtigen 19-jährigen Zyklus [9].

9 Berücksichtigen Sie die im Gregorianischen gegenüber dem Julianischen Kalender ausgefallenen Tage.

Lösung 8.4

Bis heute sind im Gregorianischen Kalender gegenüber dem Julianischen $10 + 3 = 13$ Tage ausgefallen. Beispielsweise ist die orthodoxe Ostergrenze des Jahres 2024 ($\gamma(2024) = 11$) julianisch am 15. April und gregorianisch am 28. April, die orthodoxe Ostergrenze des Jahres 2025 ist julianisch am 4. April und gregorianisch am 17. April, usw. Um das Osterdatums des Jahres 2024 zu bestimmen, entnimmt man der Tabelle 8.12, dass der 31. März im Gregorianischen Kalender ein Sonntag ist. Somit ist auch der 28. April ein Sonntag und Ostern wird in der orthodoxen Kirche eine Woche später am 5. Mai gefeiert.

Jahreszahl	Orthodoxe Ostergrenze	Orthodoxes Osterdatums	Osterdatum der Westkirche
2014	18. April	20. April	20. April
2015	7. April	12. April	5. April
2016	26. April	1. Mai	27. März
2017	15. April	16. April	16. April
2018	4. April	8. April	1. April
2019	23. April	28. April	21. April
2020	12. April	19. April	12. April
2021	1. Mai	2. Mai	4. April
2022	20. April	24. April	17. April
2023	9. April	16. April	9. April
2024	28. April	5. Mai	31. März
2025	17. April	20. April	20. April
2026	6. April	12. April	5. April
2027	25. April	2. Mai	28. März
2028	14. April	16. April	16. April
2029	3. April	8. April	1. April
2030	22. April	28. April	21. April
2031	11. April	13. April	13. April
2032	30. April	2. Mai	28. März

Tabelle 8.9 Osterdaten für die Jahre 2014 bis 2032

Aufgabe 8.5

→ Vertiefung 8.5.1

Wie können Sie mit Hilfe von Tabelle 8.12 und des Neulichtkalenders *(→ Tabelle 8.3)* die Ostergrenze eines beliebigen Jahres von 1901 bis 2199 bestimmen? Ermitteln Sie mit dieser Methode einige Ostergrenzen, z.B. für das aktuelle Jahr und für das Jahr 2050.

Lösung 8.5

Tabelle 8.12 zeigt die Zuordnung zwischen Goldener Zahl und Gregorianischer Epakte im Zeitraum von 1901 bis 2099.

Beispiel 1: Das Jahr 2021 hat Epakte 16. Gemäss Neulichtkalender beginnt der Ostermonat am 15. März und die Ostergrenze ist 13 Tage später, also am 28. März.

Beispiel 2: Das Jahr 2050 hat Goldene Zahl 18 und somit Epakte 6. Der Ostermonat beginnt am 25. März, und die Ostergrenze ist am 7. April.

→ Vertiefung 8.5.1

Aufgabe 8.6

Kennt man die Epakte des aktuellen Jahres *(→ Tabelle 8.12)*, so kann man mit Hilfe des Neulichtkalenders *(→ Tabelle 8.3)* das Datum jedes zyklischen Neulichts des Jahres bestimmen. Im Folgenden werden die zyklischen mit den entsprechenden astronomischen Daten verglichen.

a. Bestimmen Sie beispielsweise das Datum des nächsten zyklischen Neulichts.
b. Vergleichen Sie dieses Datum mit demjenigen des astronomischen Neumonds (Internetrecherche). Berücksichtigen Sie dabei, dass der Neumond 18–42 Stunden vor dem Neulicht eintritt.
c. Dreizehn Tage nach dem zyklischen Neulicht tritt der zyklische Vollmond ein. Bestimmen Sie für die Beispiele der vorangehenden Teilaufgabe das Datum des darauf folgenden zyklischen Vollmonds, und vergleichen Sie es mit dem Datum des entsprechenden astronomischen Vollmonds.

Lösung 8.6

a. Lösung für 06.12.2021: Das Jahr 2021 hat Epakte 16. Das nächste zyklische Neulicht ist am 04.01.2022.

   Lösung für 28.10.2022: Das Jahr 2022 hat Epakte 27. Das nächste zyklische Neulicht ist am 25.11.2022.
b. Lösung für 06.12.2021: Der Neumond fällt auf den 02.01.2022 um 19:33 Uhr. Das astronomische Neulicht tritt am 03.01. oder am 04.01.2022 ein.

   Lösung für 28.10.2022: Der Neumond tritt am 23.11.2022 um 23:57 Uhr ein. Das astronomische Neulicht fällt auch auf den 25.11.2022.
c. Lösung für 06.12.2021: Der zyklische Vollmond ist am 17.01.2022. Der astronomische Vollmond tritt am 18.01.2022 um 00:48 Uhr ein.

   Lösung für 28.10.2022: Der zyklische Vollmond ist am 08.12.2022. Der astronomische Vollmond tritt am 08.12.2022 um 05:08 ein.

→ Vertiefung 8.5.1, Tabelle 8.12

Aufgabe 8.7

Jede zyklische Lunation, welche den 29. Februar enthält, wird um einen Tag verlängert, egal ob diese Lunation in einem Sonnengemeinjahr voll oder hohl wäre *(→ Abschnitt 8.4)*.

Bestimmen Sie im 21. Jahrhundert

a. ein Jahr mit einer zyklischen Lunation, welche 31 Tage umfasst.
b. ein Jahr mit einer zyklischen Lunation, welche den 29. Februar enthält und doch nur 30 Tage dauert.

Lösung 8.7

a. Dem Neulichtkalender entnimmt man, dass alle Schaltjahre mit Epakte $1 \leq \varepsilon \leq 24$ eine solche Lunation enthalten, z.B. das Jahr 2004 mit Epakte 8. Von 1900 bis 2099 nimmt die Epakte von Jahr zu Jahr, modulo 30 gerechnet, stets um 11 zu. In jedem ersten Zyklusjahr (z.B. 1995, 2014, ...) beträgt die Epakte 29. Die Abfolge der Epakten ist also

   $(29, 10, 21, 2, 13, 24, 5, 16, 27, 8, 19, 0, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17)$

   (vgl. auch Tabelle 8.12). In dieser Zahlenfolge sind nur Jahre mit den Epakten 29, 27, 0 und 25 Ausnahmen. Alle Schaltjahre, die keine dieser vier Epakten haben, enthalten eine zyklische Lunation mit 31 Tagen. Dies gilt beispielsweise für die Schaltjahre 2020 (Epakte 5), 2024 (Epakte 19), 2028 (Epakte 3), 2032 (Epakte 17), usw.
b. Der Lösung von Teilaufgabe a. entnehmen wir, dass nur die Schaltjahre mit den Epakten 29, 27, 25 und 0 solche Lunationen enthalten. Die Epakte 29 erscheint in den Jahren $2014 + n \cdot 19$ für $0 \leq n \leq 4$. Für $n = 2$ ist das Jahr 2052 ein Schaltjahr. Die Epakte 27 erscheint in jedem 9. Zyklusjahr (vgl. a.), also in den Jahren $2003 + n \cdot 19$ für $0 \leq n \leq 5$ und somit im Schaltjahr $2060 = 2003 + 57$. Die Epakte 25 erscheint in jedem 17. Zyklusjahr und somit im Schaltjahr $2068 = 2011 + 57$, und die Epakte 0 im Schaltjahr $2044 = 2006 + 38$.
   Lösungen sind also die Sonnenschaltjahre 2044, 2052, 2060, 2068. Alle anderen Sonnenschaltjahre enthalten eine zyklische Lunation mit 31 Tagen.

Aufgabe 8.8

→ Vertiefung 8.5.1

Wir nehmen an, dass in einem regulären kanonischen 19-jährigen Zyklus ein Jahr j_1 mit Epakte 24 vorkommt.
Zeigen Sie:
Im selben 19-jährigen Zyklus gibt es genau dann ein Jahr j_2 mit Epakte 25 oder xxv *(→ Vertiefung 8.5.1, Die Epakte xxv)*, wenn $j_2 = j_1 + 11$ und $\gamma(j_1) \leq 8$. (Es gilt dann $\gamma(j_2) \geq 12$ und $\varepsilon(j_2) = \text{xxv}$.)

Lösung 8.8

Da die Epakte in einem regulären kanonischen Zyklus von Jahr zu Jahr um 11 (modulo 30) zunimmt, geht es offenbar darum, die Gleichung $24 + 11x \equiv 25 \pmod{30}$ in $\mathbb{Z}$ zu lösen. Dies führt auf die lineare Gleichung $11x = 30y + 1$. Man setze $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Man erhält die Werte $\ldots - 119, -89, -59, -29, 1, 31, 61, 91, \ldots$. In dieser Folge sind -209 und 121 die betragsmässig kleinsten Zahlen, welche durch 11 teilbar sind. Von den Lösungen $x_1 = -19$ und $x_2 = 11$ kommt die erste nicht in Frage, weil das Jahr $j_2 = j_1 - 19$ nicht zum selben Zyklus gehört. Die einzige sinnvolle Lösung ist also $j_2 = j_1 + 11$, d.h. Epakte 25 oder xxv erscheint 11 Jahre nach Epakte 24. Da das Jahr j_2 zum selben Zyklus wie j_1 gehört, gilt $\gamma(j_2) \leq 19$ und somit $\gamma(j_1) \leq 8$. Ferner ist $\gamma(j_2) = \gamma(j_1) + 11 \geq 12$, also $\varepsilon(j_2) = \text{xxv}$.

→ Vertiefung 8.5.1

Aufgabe 8.9

Wir nehmen an, dass in einem regulären kanonischen Zyklus ein Jahr j_1 mit Epakte ε vorkommt.
Zeigen Sie:

a. Im selben 19-jährigen Zyklus tritt genau dann ein Jahr j_2 mit Epakte $(\varepsilon + 1) \bmod 30$ auf, wenn $j_2 = j_1 + 11$ und $\gamma(j_1) \leq 8$.
b. Falls $\gamma(j_1) \leq 11$, gibt es im selben Zyklus *kein* Jahr mit Epakte $(\varepsilon - 1) \bmod 30$.

Lösung 8.9

a. Jetzt geht es darum, die Gleichung $\varepsilon + 11x \equiv \varepsilon + 1 \pmod{30}$ ganzzahlig zu lösen. Dies führt auf dieselbe lineare Gleichung wie in Aufgabe 8.8 und somit auf dieselbe Lösung $x = 11$ bzw. $j_2 = j_1 + 11$. Wieder muss $\gamma(j_1) \leq 8$ sein, damit das Jahr $j_2 = j_1 + 11$ zum selben Zyklus gehört, denn $\gamma(j_2) = \gamma(j_1) + 11 \leq 19$.
b. Kommt ein Jahr j_0 mit Epakte $(\varepsilon - 1) \bmod 30$ im selben Zyklus vor, so gilt $\gamma(j_1) = \gamma(j_0) + 11$. Wegen $\gamma(j_0) \geq 1$ ist dies jedoch unerfüllbar, falls $\gamma(j_1) \leq 11$.

→ Abschnitt 8.4, Vertiefung 8.5.1

Aufgabe 8.10

Nach Definition beginnt das Gregorianische Mondjahr mit derjenigen zyklischen Lunation, welche den 1. Januar enthält. Die Epakte gibt im Normalfall das Mondalter am 31. Dezember an. Bei einem Mondsprung oder einer Mondangleichung beginnt das Mondjahr einen Tag später als die Epakte angibt *(→ Der Mondsprung)*.

Bei einer Sonnenangleichung wird die Epakte um eine Einheit vermindert. Der zusätzliche Tag wird der letzten Lunation des Vorjahres angehängt und hat somit keinen Einfluss auf den Beginn des neuen Mondjahres.
Bestimmen Sie den Beginn der Gregorianischen Mondjahre, welche den Sonnenjahren 2024, 2044, 2100, 2200, 2223 und 2400 entsprechen.

Lösung 8.10

- Das Jahr 2024 hat Epakte 19 *(→ Tabelle 8.12)* und ist kein erstes Zyklusjahr ($\gamma = 11$). Der Mond ist am 31. Dezember also 19 Tage alt. Das Mondjahr beginnt somit am 13. Dezember 2023.
- Das Jahr 2044 hat Epakte 0 (Vgl. die Lösung der Aufgabe 8.7) und $\gamma = 12$. Das Mondjahr beginnt somit am 1. Januar 2044.
- Im Jahr 2100 findet sowohl eine Sonnen- als auch eine Mondangleichung statt. Wie im Jahr 2024 beträgt die goldene Zahl $\gamma = 11$ und die Epakte 19, und das Mondjahr beginnt am 13. Dezember 2099. (Alternativ kann die Epakte auch mit der Formel 8.9 bestimmt werden.)
- Im Jahr 2200 findet eine Sonnenangleichung statt. Das Jahr 2200 hat $\gamma = 16$ und Epakte
$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left(11 \cdot 16 - 10 - \left\lfloor (22-15) \cdot \tfrac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor (22-14) \cdot \tfrac{8}{25} \right\rfloor\right) \bmod 30 \\ &= 163 \bmod 30 = 13 \quad (\to \textit{Formel 8.9}).\end{aligned}$$
Das Mondjahr beginnt am 19. Dezember 2199.
- Das Jahr 2223 hat Epakte 28 und ist ein erstes Zyklusjahr. Wegen des Mondsprungs ist der Mond am 31. Dezember erst 27 Tage alt. Somit beginnt das Mondjahr am 5. Dezember 2222. Die Epakte kann mit Formel 8.9 berechnet werden oder mit der Überlegung, dass das Jahr 2219 Epakte 13 wie das Jahr 2200 hat und die Epakte pro Jahr um 11 oder bei Mondsprung um 12 modulo 30 zunimmt: $(13 + 3 \cdot 11 + 12) \bmod 30 = 28$.
- Im Jahr 2400 ist die goldene Zahl $\gamma = 7$ und die Epakte
$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left(11 \cdot 7 - 10 - \left\lfloor (24-15) \cdot \tfrac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor (24-14) \cdot \tfrac{8}{25} \right\rfloor\right) \bmod 30 \\ &= (67 - 6 + 3) \bmod 30 = 4.\end{aligned}$$
Im Jahr 2400 findet jedoch eine Mondangleichung statt, und der Mond ist am 31. Dezember erst 3 Tage alt. Das Mondjahr beginnt somit am 29. Dezember 2399.

→ Vertiefung 8.5.2

Aufgabe 8.11

a. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel 8.10 die Ostergrenze für Jahre mit den Epakten 22, 24, 25, xxv und 27.

b. Verifizieren Sie, dass

$$\left\lfloor\frac{\varepsilon}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{\gamma}{12}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{\varepsilon}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{\varepsilon}{26}\right\rfloor\right) = \left\lfloor\frac{\varepsilon - \left\lfloor\frac{\gamma}{12}\right\rfloor}{25}\right\rfloor$$

für jeden Wert der Epakte ε und der Goldenen Zahl γ (Hinweis: Fallunterscheidung).

Lösung 8.11

a.
- In Jahren mit Epakte 22 fällt die Ostergrenze auf den 22. März:
$$\begin{aligned} OG &= 44 - 22 + \left\lfloor\tfrac{22}{24}\right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor\tfrac{22}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{\gamma(j)}{12}\right\rfloor\left(\left\lfloor\tfrac{22}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{22}{26}\right\rfloor\right)\\ &= 44 - 22 + 0 + 0 - 0 = 22\end{aligned}$$
- In Jahren mit Epakte 24 ist die Ostergrenze am 18. April:
$$\begin{aligned} OG &= 44 - 24 + \left\lfloor\tfrac{24}{24}\right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor\tfrac{24}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{\gamma(j)}{12}\right\rfloor\left(\left\lfloor\tfrac{24}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{24}{26}\right\rfloor\right)\\ &= 44 - 24 + 29 + 0 - 0 = 49\end{aligned}$$
- In Jahren mit Epakte 25 ist $\gamma < 12$ und die Ostergrenze ebenfalls am 18. April:
$$\begin{aligned} OG &= 44 - 25 + \left\lfloor\tfrac{25}{24}\right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor\tfrac{25}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{\gamma(j)}{12}\right\rfloor\left(\left\lfloor\tfrac{25}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{25}{26}\right\rfloor\right)\\ &= 19 + 29 + 1 - \left\lfloor\tfrac{\gamma(j)}{12}\right\rfloor \cdot 1 = 49\end{aligned}$$
- In Jahren mit Epakte xxv ist $\gamma \geq 12$ und die Ostergrenze am 17. April:
$$\begin{aligned} OG &= 44 - 25 + \left\lfloor\tfrac{25}{24}\right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor\tfrac{25}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{\gamma(j)}{12}\right\rfloor\left(\left\lfloor\tfrac{25}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{25}{26}\right\rfloor\right)\\ &= 19 + 29 + 1 - \left\lfloor\tfrac{\gamma(j)}{12}\right\rfloor \cdot 1 = 49 - 1 = 48\end{aligned}$$
- In Jahren mit Epakte 27 ist die Ostergrenze am 16. April:
$$\begin{aligned} OG &= 44 - 27 + \left\lfloor\tfrac{27}{24}\right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor\tfrac{27}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{\gamma(j)}{12}\right\rfloor\left(\left\lfloor\tfrac{27}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\tfrac{27}{26}\right\rfloor\right)\\ &= 17 + 29 + 1 - \left\lfloor\tfrac{\gamma(j)}{12}\right\rfloor \cdot 0 = 47\end{aligned}$$

b. Falls die Epakte $\varepsilon < 25$ ist, sind beide Seiten der Gleichung gleich 0. Ist die Epakte $\varepsilon \geq 26$, so sind beide Seiten gleich 1.
Für Epakte 25 gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:
Ist $\gamma < 12$, so ist $\left\lfloor\frac{\gamma}{12}\right\rfloor = 0$, und beide Seiten der Gleichung sind ebenfalls gleich 1.
Ist hingegen $\gamma \geq 12$, so gilt sowohl
$\left\lfloor\frac{\varepsilon}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{\gamma}{12}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{\varepsilon}{25}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{25}{26}\right\rfloor\right) = 1 - 1 \cdot (1 - 0) = 0$ als auch

$$\left\lfloor \frac{\varepsilon - \lfloor \frac{\gamma}{12} \rfloor}{25} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{25-1}{25} \right\rfloor = 0.$$

Aufgabe 8.12

→ Vertiefungen 8.5.1, 8.5.2, Tabelle 8.11

a. Im Jahr 2200 findet eine Sonnenangleichung, aber keine Mondangleichung statt. Der kanonische 19-jährige Zyklus, welcher das Jahr 2200 enthält, ist deshalb irregulär. In diesem Zyklus kommt es zu Wiederholungen der Epakte und damit der Ostergrenze *(→ Vertiefung 8.5.1, Irreguläre kanonische Zyklen)*. In welchen Jahren ist dies der Fall?

b. Auch der kanonische 19-jährige Zyklus, der das Jahr 2300 enthält ist irregulär. Auch in diesem Zyklus kommt dieselbe Ostergrenze zweimal vor. In welchen Jahren geschieht das?

Lösung 8.12

a. Wegen 2200 mod 19 = 15 beginnt der Zyklus im Jahr 2185 und endet im Jahr 2203. Die Epakte des Jahres 2185 ist

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left(11 \cdot 1 - 10 - \left\lfloor (20-15) \cdot \tfrac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor (20-14) \cdot \tfrac{8}{25} \right\rfloor\right) \bmod 30 \\ &= (1 - 3 + 1) \bmod 30 = 29\end{aligned}$$

Bis zum Jahr 2199 folgen die Epakten[10] 10, 2, 2,13, 24, 5, 16, 27, 8, 19, 0, 11, 22 und 3. Das Jahr 2200 hat wegen der Sonnenangleichung Epakte $13 = 3 + 11 - 1$ *(→ Abschnitt 8.4)*. In den Jahren 2200 bis 2203 erscheinen somit wieder die Epakten $13, 24, 5, 16$. Die Epakte 13 kommt also sowohl im Jahr 2189 als auch im Jahr 2200 vor. Für die Ostergrenzen dieser Jahre ergibt sich

$$\begin{aligned}OG &= 44 - 13 + \left\lfloor \tfrac{13}{24} \right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor \tfrac{13}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{\gamma(j)}{12} \right\rfloor \left(\left\lfloor \tfrac{13}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{13}{26} \right\rfloor\right) \\ &= 44 - 13 + 0 + 0 - 0 = 31\end{aligned}$$

Die Ostergrenze der Jahre 2189 und 2200 ist also am 31. März. Analog berechnen sich die Ostergrenzen der Jahre 2190, 2191, 2192, 2201, 2202 und 2203 *(→ Tabelle 8.10)*[11].

[10] Auch in einem irregulären Zyklus nimmt die Epakte, modulo 30 gerechnet, von Jahr zu Jahr um 11 zu, falls im Folgejahr weder eine Sonnen- noch eine Mondangleichung erfolgt.

[11] Die Ostergrenzen kann man auch aus dem Neulichtkalender ablesen *(→ Tabelle 8.3)*.

Tabelle 8.10 Zweimal dieselben Epakten und Ostergrenzen im gleichen kanonischen Zyklus

Jahr	...	2189	2190	2191	2192	...	2200	2201	2202	2203
Epakte	...	13	24	5	16	...	13	24	5	16
Ostergrenze	...	31. März	18. April	8. April	28. März	...	31. März	18. April	8. April	28. März

b. Der Zyklus beginnt im Jahr 2299 ($2299 = 121 \cdot 19$) mit Epakte $\varepsilon = (11 - 10 - 5 + 2) \bmod 30 = 28$ und Ostergrenze $OG = 44 - 28 + 30 = 46$, also am 15. April. Wegen der Sonnenangleichung gilt $\varepsilon(2300) = (28 + 11 - 1) \bmod 30 = 8$. Die Epakten der darauf folgenden Jahre sind $19, 0, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, \mathbf{28}, 9, \ldots$. Also hat das Jahr 2310 ebenfalls Epakte 28 und damit – wie das Jahr 2299 – den 15. April als Ostergrenze[12]. Weitere Wiederholungen gibt es in diesem Zyklus nicht, da ja 2299 in diesem Zyklus das einzige Jahr vor der Sonnenangleichung ist.

12 Ausser bei Epakte 25 ist die Ostergrenze durch die Epakte eindeutig bestimmt *(→ Aufgabe 8.13)*.

→ Vertiefungen 8.5.1, 8.5.2, Tabelle 8.11

Aufgabe 8.13

a. Bestimmen Sie die Ostergrenzen der Jahre 3098, 3099, 3109 und 3110.

b. Verifizieren Sie die folgende Aussage *(→ Vertiefung 8.5.1, Irreguläre kanonische Zyklen)*: Im irregulären Zyklus, der von 3097 bis 3115 dauert, wird sowohl ein Jahr mit Epakte 25 als auch ein Jahr mit Epakte xxv vorkommen.

c. Zeigen Sie: Im Zyklus, der von 3591 bis 3609 dauert, wird sowohl ein Jahr mit Epakte 25 als auch ein Jahr mit Epakte 24 erscheinen *(→ Vertiefung 8.5.1, Irreguläre kanonische Zyklen)*.

Lösung 8.13

a. Der Zyklus beginnt im Jahr 3097. Das Jahr 3097 hat Epakte

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left(11 \cdot 1 - 10 - \left\lfloor (30-15) \cdot \tfrac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor (30-14) \cdot \tfrac{8}{25} \right\rfloor\right) \bmod 30 \\ &= (11 - 10 - 11 + 5) \bmod 30 = 25\end{aligned}$$

Das Jahr 3098 hat Epakte $(25 + 11) \bmod 30 = 6$, und die Ostergrenze ist am 7. April ($OG = 44 - 6 = 38$). Das Jahr 3099 hat Epakte $6 + 11 = 17$, und die Ostergrenze ist am 27. März. Wegen des ausfallenden Schalttags gilt $\varepsilon(3100) = 17 + 11 - 1 = 27$. Die Abfolge der Epakten im Zyklus von 3097 bis 3115 lautet somit

$(25, \mathbf{6}, \mathbf{17}, 27(!), 8, 19, 0, 11, 22, 3, 14, \text{xxv}, \mathbf{6}, \mathbf{17}, 28, 9, 20, 1, 12)$

Das Jahr 3108 hat Epakte xxv, denn $\gamma(3108) = 12$. Also hat das Jahr 3109 wieder Epakte 6 und das Jahr 3110 Epakte 17. Somit wiederholen sich die Ostergrenzen: Im Jahr 3109 ist die Ostergrenze am 7. April und im Jahr 3110 am 27. März.

b. $\gamma(3097) = 1$, $\varepsilon(3097) = 25$; $\gamma(3108) = 12$, $\varepsilon(3108) = \text{xxv}$
(Vgl. die Lösung von Aufgabenteil a.)

c. Das Jahr 3591 hat Epakte

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left(11\cdot 1 - 10 - \left\lfloor (35-15)\cdot\tfrac{3}{4}\right\rfloor + \left\lfloor (35-14)\cdot\tfrac{8}{25}\right\rfloor\right) \bmod 30\\ &= (11-10-15+6) \bmod 30 = 22\end{aligned}$$

Die Epakten der Jahre 3592–3599 sind somit 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20. Wegen der Mondangleichung hat das Jahr 3600 die Epakte $\varepsilon = (20+11+1) \bmod 30 = 2$. Die Abfolge der Epakten des ganzen Zyklus ist somit

$(22, 3, 14, \mathbf{25}, 6, 17, 28, 9, 20, 2(!), 13, \mathbf{24}, 5, 16, 27, 8, 19, 0, 11)$

Also hat das Jahr 3594 die Epakte 25, und das Jahr 3602 hat Epakte 24.

Aufgabe 8.14

→ Vertiefung 8.5.2

Osterdatum in 5 Schritten (→ *Tabelle 8.11*):
Berechnen Sie das Osterdatum für das Jahr Ihrer Geburt sowie für die Jahre 2023 und 2034.

Lösung 8.14

- Im Jahr 2023 ist Ostern am 9. April:

  Goldene Zahl: $\gamma(2023) = 10$

  Epakte:

  $$\begin{aligned}\varepsilon(2023) &= \left(11\cdot 10 - 10 - \left\lfloor (20-15)\cdot\tfrac{3}{4}\right\rfloor + \left\lfloor (20-14)\cdot\tfrac{8}{25}\right\rfloor\right) \bmod 30\\ &= (100-3+1) \bmod 30 = 8\end{aligned}$$

  Ostergrenze:

  $$OG(2023) = 44 - 8 + \left\lfloor \tfrac{8}{24}\right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor \tfrac{8}{25}\right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{10}{12}\right\rfloor \left(\left\lfloor \tfrac{8}{25}\right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{8}{26}\right\rfloor\right) = 36$$

  Wochentagsnummer des 0. März:

  $$\begin{aligned}w_0(2023) &= \left(2 + \left\lfloor (2023-1600)\cdot\tfrac{5}{4}\right\rfloor - \left\lfloor (20-15)\cdot\tfrac{3}{4}\right\rfloor\right) \bmod 7\\ &= (2+528-3) \bmod 7 = 2\end{aligned}$$

  Wochentagsnummer der Ostergrenze:

  $w_1(2023) = (36+2) \bmod 7 = 3$

  Osterdatum: $OD(2023) = 36 + 7 - 3 = 40$

- Im Jahr 2034 ist Ostern ebenfalls am 9. April:

  Goldene Zahl: $\gamma(2034) = 2$

  Epakte:

$$\begin{aligned}\varepsilon(2034) &= \left(11 \cdot 2 - 10 - \left\lfloor (20-15) \cdot \tfrac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor (20-14) \cdot \tfrac{8}{25} \right\rfloor\right) \bmod 30 \\ &= (22 - 10 - 3 + 1) \bmod 30 = 10\end{aligned}$$

Ostergrenze:

$$OG(2034) = 44 - 10 + \left\lfloor \tfrac{8}{24} \right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor \tfrac{8}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{10}{12} \right\rfloor \left(\left\lfloor \tfrac{8}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \tfrac{8}{26} \right\rfloor\right) = 34$$

Wochentagsnummer des 0. März:

$$\begin{aligned}w_0(2034) &= \left(2 + \left\lfloor (2034-1600) \cdot \tfrac{5}{4} \right\rfloor - \left\lfloor (20-15) \cdot \tfrac{3}{4} \right\rfloor\right) \bmod 7 \\ &= (2 + 542 - 3) \bmod 7 = 2\end{aligned}$$

Wochentagsnummer der Ostergrenze:

$$w_1(2034) = (34 + 2) \bmod = 1$$

Osterdatum: $\quad OD(2034) = 34 + 7 - 1 = 40$