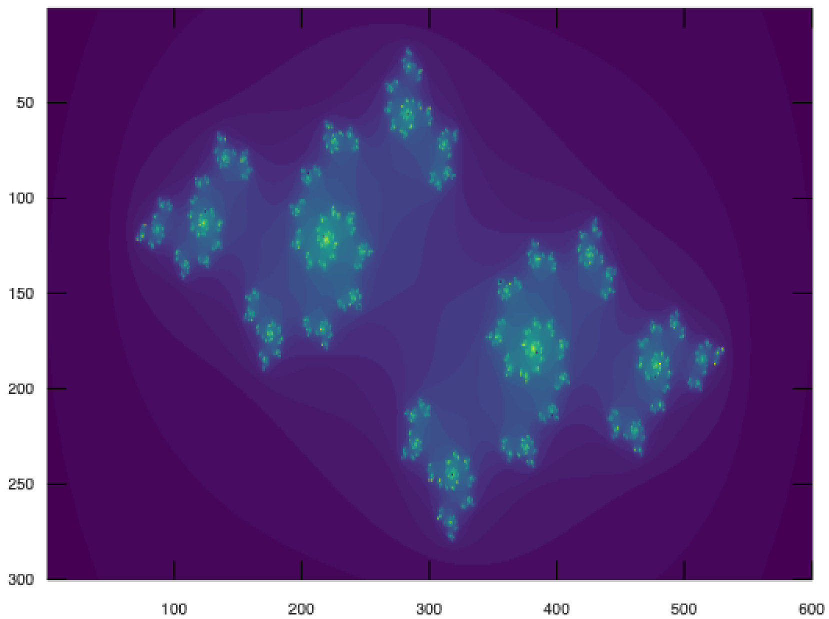
D M K
Deutschschweizerische Mathematikkommission

V S M P
Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte

Komplexe Zahlen und Funktionen

Aufgabensammlung



Nora Mylonas
Andreas Nüesch
Angelika Rupflin Signer

Inhaltsverzeichnis

Vorwort der Herausgeberin

«Die DMK setzt sich zur Aufgabe, den Mathematikunterricht an Mittelschulen zu fördern. Insbesondere trägt sie durch die Herausgabe von mathematischen Lehrmitteln [...] dazu bei, dass dieser Unterricht auf hohem Niveau stattfindet.»

Diesem Zitat aus dem Reglement der Deutschschweizerischen Mathematikkommission folgend hat die DMK in den vergangenen Jahren ihre Lehrmittel und Aufgabensammlungen für das Grundlagenfach zu den Themen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik überarbeitet und aktualisiert. Weiter gibt sie zwei Formelsammlungen heraus, welche in Zusammenarbeit mit der Deutschschweizerischen Physikkommission und der Deutschschweizerischen Chemiekommission aktuell gehalten werden.

Da es für das Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik oder das Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik keine oder nur wenige geeignete Lehrmittel gibt, gehört es zum Alltag der Lehrpersonen dieser Fächer, die Unterrichtsmaterialien in Eigenregie zu erarbeiten. Aus diesem Grund hat sich die DMK vorgenommen in den kommenden Jahren Unterrichtsmaterialien zu verbreiteten Inhalten des Schwerpunkt- und Ergänzungsfachs herauszugeben und diese zur Verfügung zu stellen. Da wir den Markt für diese Unterrichtsmaterialien als klein einschätzen, haben wir uns entschieden auf eine Veröffentlichung in Form von Büchern oder gedruckten Broschüren zu verzichten. Die so entstandenen «Themenhefte» sollen von der Homepage der DMK heruntergeladen werden und im Unterricht eingesetzt werden können. Die Benutzerinnen und Benutzer möchten wir auffordern, die durch die Autorinnen und Autoren geleistete Arbeit zu respektieren und mit der Bezahlung eines Honorars dazu beizutragen, dass weitere solche «Themenhefte» entstehen können. Informationen zur Bezahlung und auch die Datei zum Download findet man auf der Website der DMK: dmk.vsmp.ch

Den Anfang in der Reihe bildet das vorliegende Themenheft zu den komplexen Zahlen und Funktionen. Ein grosses Dankeschön geht von Seiten der DMK namentlich an Nora Mylonas, Andreas Nüesch und Angelika Rupflin Signer für ihren Einsatz, ihre Autorenschaft und den Satz. Angelika Rupflin Signer zeichnete zusätzlich auch für die Projektleitung verantwortlich wofür ihr ein Extra-Dankeschön gebührt. Des Weiteren bedanken wir uns bei den Lehrpersonen, welche das Unterrichtsmaterial in ihrem Unterricht erprobt haben und durch ihre Rückmeldung zu weiteren Verbesserungen beigetragen haben.

Für die Deutschschweizerische Mathematikkommission
Josef Züger, Präsident

Einleitende Bemerkungen zu diesem Themenheft

Die hier vorliegende Aufgabensammlung ist für den gymnasialen Unterricht angelegt. Da die Themenbereiche je nach Schule zu unterschiedlichen Zeitpunkten mit unterschiedlichen mathematischen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler behandelt werden, müssen die Lehrerinnen und Lehrer eine geeignete Auswahl der Aufgaben treffen.
Die Theorie ist knapp gehalten, sie soll orientieren und zusammenfassen. Der Text ist aber nicht als Leitprogramm für selbständiges Lernen konzipiert.

In den Kapiteln 1 und 2 werden die Grundlagen für die späteren Kapitel gelegt. Kapitel 3, 4 und 5 können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Jedes Kapitel schliessen wir mit einem Abschnitt *Vermischte Aufgaben zur Repetition*. Anhand dieser Aufgaben soll das Gelernte repetiert werden können.

Die Lösungen der Aufgaben befinden sich nach Kapiteln geordnet im Anschluss an Kapitel 5.
Anmerkungen und Literaturverweise sind fortlaufend nummeriert und am Schluss des Themenhefts aufgelistet.

Kapitel 1: Einführung in die komplexen Zahlen
Aufgaben zu den grundlegenden Rechenfertigkeiten mit komplexen Zahlen in Normal-, Polar- und Exponentialform, Umwandlung von der einen in die andere Form, Gauss'sche Zahlenebene.
Bei der Polarform verwenden wir konsequent das Gradmass, bei der Exponentialform das Bogenmass eines Winkels.
Zur Herleitung der Exponentialform geben wir den Weg über die Taylorreihenentwicklungen vor, verweisen aber auch auf eine heuristische Methode.

Kapitel 2: Gleichungen
Aufgaben zu Gleichungen. Schwerpunkt bilden dabei lineare, quadratische und Gleichungen der Art $z^n = c$. Rezepte zum Lösen von Gleichungen 3. und 4. Grades werden angegeben, ebenso Literaturangaben über Herleitungen entsprechender Formeln.
Wir schliessen mit einem Ausblick auf ein Verfahren zum Finden von Lösungen Gleichungen höheren Grades.

Kapitel 3: Komplexe Folgen
Aufgaben zu komplexen Folgen und Iterationen, sowie eine knappe Hinführung zu Julamengen und der Mandelbrotmenge.

Kapitel 4: Komplexe Funktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$
Dieser Typ Funktionen ist eine andere Darstellungsform von Parametrisierungen im $\mathbb{R}^2$. Die Aufgaben erlauben, Kenntnisse aus dem Analyisunterricht mit den komplexen Zahlen zu verbinden.
Wir verwenden hier die Exponentialform der komplexen Zahlen.

Kapitel 5: Komplexe Funktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{C}$
Der Schwerpunkt liegt bei linearen und quadratischen Funktionen, sowie der Inversion am Einheitskreis.
Die geometrische Bedeutung der linearen Abbildungen und der Inversion am Einheitskreis wird thematisiert. Zusammenhänge mit Bildern von Escher werden thematisiert.

Wir danken Alfred Vogelsanger für das sorgfältige Korrekturlesen dieser Aufgabensammlung und seine wertvollen Hinweise.

Nora Mylonas
Andreas Nüesch
Angelika Rupflin Signer

1 Einführung in die komplexen Zahlen

In der Algebra ist nicht jede Gleichung in jeder Grundmenge G lösbar. So besitzen die wenigsten Gleichungen Lösungen in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Durch Erweitern einer Zahlenmenge, existieren aber für immer mehr Gleichungen auch Lösungen.

$G = \mathbb{N}$:	$x + 2 = 5$	ist lösbar, $x = 3 \in \mathbb{N}$
$G = \mathbb{N}$:	$x + 2 = 1$	ist nicht lösbar, da $x = -1 \notin \mathbb{N}$
$G = \mathbb{Z}$:	$x + 2 = 1$	ist lösbar, $x = -1 \in \mathbb{Z}$
$G = \mathbb{Z}$:	$2x + 2 = 5$	ist nicht lösbar, da $x = 1.5 \notin \mathbb{Z}$
$G = \mathbb{Q}$:	$2x + 2 = 5$	ist lösbar, $x = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$
$G = \mathbb{Q}$:	$x^2 + 3 = 5$	ist nicht lösbar, da $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$G = \mathbb{R}$:	$x^2 + 3 = 5$	ist lösbar, $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$
$G = \mathbb{R}$:	$x^2 + 9 = 5$	ist nicht lösbar, da $x = \sqrt{-4}$ nicht existiert.

Bei diesen Erweiterungen wurden jedes mal drei wesentliche Punkte eingehalten:

Das Permanenzprinzip

(von lateinisch permanere = bleiben)

1. Die Menge der alten Zahlen ist eine Teilmenge der neuen Zahlen.
2. Alle Rechenoperationen, die mit den alten Zahlen möglich sind, sind auch mit den neuen Zahlen möglich. Die Erweiterung erzeugt keine Einschränkung.
3. Für die neuen Zahlen gelten die selben Rechenregeln wie für die alten.

Es ist vernünftig, dieses Permanenzprinzip bei der Erweiterung eines Zahlenbereichs zu fordern. Schliesslich sollen so wichtige Eigenschaften wie die Gültigkeit der Rechenregeln nicht verloren gehen.

Damit jetzt auch die letzte der obigen Gleichungen lösbar wird, muss der Zahlenbereich der reellen Zahlen erweitert werden. Dazu wird die neue Zahl i eingeführt.

Die imaginäre Einheit

Die imaginäre Einheit i ist eine Zahl, deren Quadrat -1 ist. Es gilt somit

$$i^2 = -1$$

Damit kann nun jede quadratische Gleichung gelöst werden.

Für das obige Beispiel $x^2 + 9 = 5$ gilt dann: $x^2 = -4 = i^2 \cdot 4$ und somit $x = \pm\sqrt{i^2 \cdot 4} = \pm 2i$.

1. Löse die folgenden quadratischen Gleichungen.

   a) $x^2 = -9$ b) $x^2 = -15$ c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

1.1 Die Normalform

Die Normalform einer komplexen Zahl

Komplexe Zahlen sind Zahlen der Form $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.
Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert als

$$\mathbb{C} = \left\{ x + iy \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R} \right\}$$

Dabei ist $x = \operatorname{Re}(z)$ der **Realteil** von z und $y = \operatorname{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von z.
Eine Zahl, deren Realteil 0 ist, heisst **rein imaginär**.
Eine Zahl deren Imaginärteil 0 ist, gehört zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Um mit der imaginären Einheit vertraut zu werden, ein paar Übungen.

2. Berechne folgende Ausdrücke.
   a) $i^7 + i^9 + i^{12} + i^4$
   b) $i(-i) + (-i)^2 + i^4 - i^3 - (-i)^4$
   c) $\dfrac{i^{12} \cdot i^{10} \cdot i^{20}}{i^{44}}$
   d) $(2i - i^3)^2 + (i + 3i^2)^2$

3. Berechne i^3 , i^4 , i^5 , i^8 , i^{41} , i^{42} und stelle eine allgemeine Regel für i^n auf.

4. Es wurde nicht i definiert, sondern i^2. Das hat seinen Grund:
   Betrachte die folgende Gleichungskette und erkläre, wo die Problematik der Definition von i liegt.
   $-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$

5. Begründe folgende Aussage: Die imaginäre Einheit i ist weder positiv noch negativ.

Bei den beiden Lösungen der Aufgabe 1c) $x_1 = -1 + i$ und $x_2 = -1 - i$ fällt auf, dass sie sich nur durch das Vorzeichen vor dem Imaginärteil unterscheiden. Solche Zahlen werden **konjugiert komplexe Zahlen** genannt.

Die konjugiert komplexe Zahl

Die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ ist definiert als $\overline{z} = x - iy$.

6. **Eigenschaften von konjugiert komplexen Zahlen**
   Zeige, dass für $z = x + iy$ und $w = a + ib$ folgende Aussagen gelten.
   a) $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$
   b) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2x \in \mathbb{R}$
   c) $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z) = 2iy$
   d) $z = \overline{z}$ ist gleichbedeutend mit $\operatorname{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$
   e) $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$
   f) $\overline{z} - \overline{w} = \overline{z - w}$

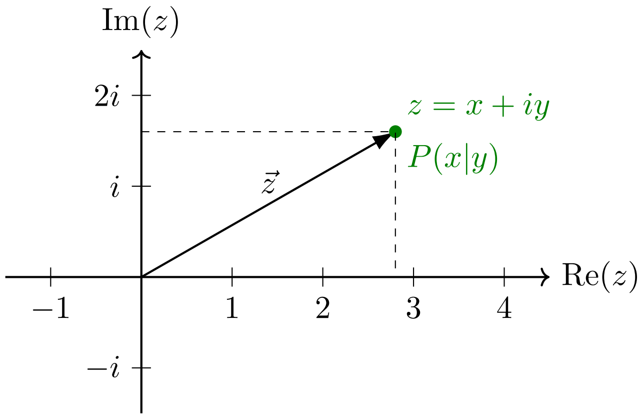
Eine komplexe Zahl besteht aus zwei Komponenten, einem Real- und einem Imaginärteil. Es bietet sich an, diese Komponenten in einem Koordinatensystem darzustellen.

1.2 Die Gauss'sche Zahlenebene

Die Gauss'sche Zahlenebene

Die Ebene der komplexen Zahlen wird als komplexe Ebene oder als Gauss'sche Zahlenebene bezeichnet. Sie kann durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem dargestellt werden. Die x-Achse wird reelle Achse genannt, die y-Achse imaginäre Achse. Eine Einheit auf der reellen Achse entspricht einer Einheit i auf der imaginären Achse.

Jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ kann ein eindeutiger Punkt $P(x|y)$ in der xy-Ebene zugeordnet werden. Umgekehrt kann jeder Punkt P als geometrische Darstellung einer komplexen Zahl verstanden werden. Zudem kann jeder komplexen Zahl ein Ortsvektor zugeordnet werden, d. h. ein Vektor, der den Ursprung durch einen Pfeil mit dem Punkt P verbindet.



7. Stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene dar.
   2, $3i$, -2, $4 + 6i$ und $-4 + 6i$

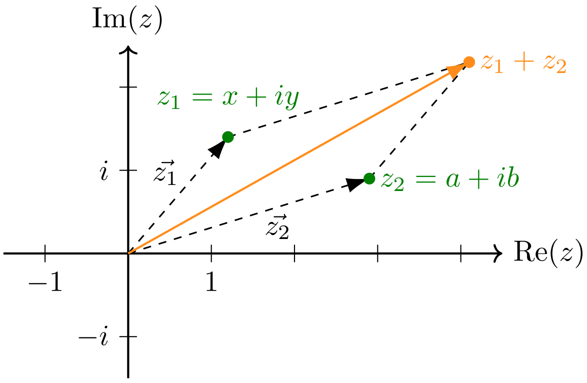
8. Es ist $z = 2 + 4i$.
   a) Stelle die folgenden Zahlen in der komplexen Ebene dar: z, $-z$, $\overline{z}$, $-\overline{z}$, $z + \overline{z}$ und $z - \overline{z}$.
   b) Beschreibe die gegenseitige Lage der Punkte z und $\overline{z}$.
   c) Beschreibe die gegenseitige Lage der Punkte z und $-z$, sowie der Punkte $\overline{z}$ und $-\overline{z}$.
   d) Was lässt sich über $z + \overline{z}$ und $z - \overline{z}$ aussagen?

9. Gib in der Gauss'schen Zahlenebene die Menge der Punkte $z = x + iy$ an, für die gilt
   a) $z = \overline{z}$ b) $\text{Re}(z) = 1$ c) $\text{Im}(z) < 0$ d) $\text{Re}(z) < 3$ und $\text{Im}(z) > 2$

Für die Addition und die Subtraktion zweier komplexer Zahlen, die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl und den Betrag einer komplexen Zahl kann auf die Vektorgeometrie zurückgegriffen werden.

Addition

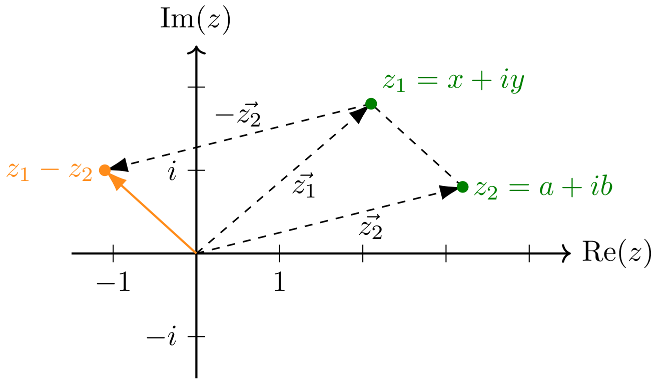
Geometrisch: Addition zweier Vektoren



Algebraisch: $(x+iy)+(a+ib) = (x+a)+i(y+b)$

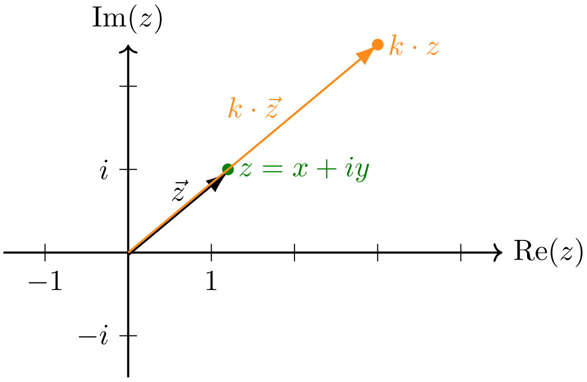
Subtraktion

Geometrisch: Subtraktion zweier Vektoren



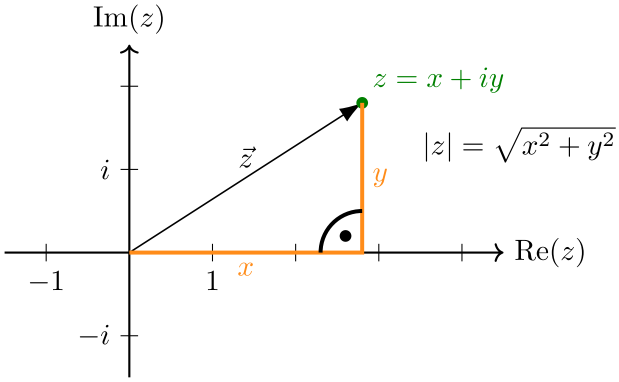
Algebraisch: $(x+iy)-(a+ib) = (x-a)+i(y-b)$

Multiplikation mit einer reellen Zahl k
Geometrisch: Streckung um den Faktor $|k|$. Wobei für $k < 0$ der Punkt zusätzlich am Nullpunkt gespiegelt wird.



Algebraisch: $k \cdot (x + iy) = kx + iky$

Betrag
Geometrisch: Der Betrag eines Vektors entspricht seiner Länge.



Algebraisch: Der Betrag einer komplexen Zahl wird definiert als ihr Abstand zum Nullpunkt. Somit kann der Betrag einer komplexen Zahl mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \geq 0$$

In den folgenden Übungen werden diese Operationen vertieft.

10. Vereinfache soweit wie möglich.

 a) $(2 + 3i) + (5 + 7i)$ b) $(1 - i) + (5 + i)$ c) $(13 + i) - (8 - 2i)$
 d) $5 \cdot (3 - 2i)$ e) $-7 \cdot (1 + i) + (7 + 8i)$

11. Bestimme den Betrag von z.

 a) $z = 2 + i$ b) $z = 5 - 3i$ c) $z = 7i$

12. Gib in der Gauss'schen Zahlenebene die Menge der Punkte $z = x + iy$ an, für die gilt

 a) $|z| = 1$ b) $|z - (1 + i)| = 2$ c) $|z - 4 + 3i| = 5$

13. Zeige, dass $|v - w|$ gerade dem Abstand der zwei komplexen Zahlen w und v entspricht.

14. Begründe folgende Aussage.
 $|z - m| = r$ (wobei $m \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ und z eine komplexe Variable) ist die Gleichung eines Kreises mit Radius r und Mittelpunkt m in der Gauss'schen Zahlenebene.

15. Welche geometrische Abbildung in der Gauss'schen Zahlenebene entspricht der folgenden Vorschrift.

 a) Zu jeder komplexen Zahl z wird $-1 + i$ hinzu addiert.
 b) Zu jeder komplexen Zahl z wird $-\overline{z}$ gebildet.
 c) Zu jeder komplexen Zahl z wird die Zahl z^* gebildet, indem Realteil und Imaginärteil von z vertauscht werden.

16. Stelle in der Gauss'schen Zahlenebene die Menge aller Punkte z dar, für die gilt

 a) $|\text{Im}(z)| \leq 1$ b) $\text{Re}(z) = |z|$ c) $z + \overline{z} = 0$ d) $z - \overline{z} = 0$

17. Stelle die folgenden **Kegelschnitte** in der komplexen Ebene dar.

 a) $|z + 2| + |z - 2| = 8$ b) $\text{Im}(z) + 1 = |z - i|$ c) $|z - 1| - |z + 1| = 1$

Die Multiplikation und Division von komplexen Zahlen wird zuerst aus dem algebraischen Blickwinkel betrachtet.

Die Rechenoperationen und Rechengesetze aus den reellen Zahlen müssen erhalten bleiben. i wird als Variable behandelt. Tritt i^2 auf, so wird i^2 durch -1 ersetzt.

$$\begin{aligned}(a+ib)\cdot(x+iy) &= ax+iay+ibx+by\cdot i^2\\ &= ax+i(ay+bx)+by(-1)\\ &= ax-by+i(ay+bx)\end{aligned}$$

Multiplikation in Normalform

$$(a+ib)\cdot(x+iy)=ax-by+i(ay+bx)$$

18. Vereinfache den Term soweit wie möglich.

a) $(5+3i)(6-4i)$ b) $(-i)^2$ c) $(8+2i)(8-2i)$
d) $8i\cdot 5i$ e) $(5-3i)^3$ f) $(x+iy)(x-iy)$

19. Du kennst die 3. Binomische Formel $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Mithilfe von komplexen Zahlen kannst du auch a^2+b^2 in zwei Klammern zerlegen.

a) a^2+b^2 b) $9x^2+4y^2$ c) $25a^4+9b^4$
d) $a+b$ wobei $a,\, b\in\mathbb{R}^+$ e) $2c+3d$ wobei $c,\, d\in\mathbb{R}^+$

20. Bestimme alle $z\in\mathbb{C}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen und stelle sie in der komplexen Ebene dar.

a) $\operatorname{Re}(z)\cdot\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=1$ b) $z^2+z\cdot\overline{z}=2$ c) $z+\overline{z}+|z|=0$

Für die Division von komplexen Zahlen muss etwas in die mathematische Trickkiste gegriffen werden. Um den Term $\frac{1}{1+i}$ in Normalform zu bringen, muss die folgende Frage beantwortet werden:

Womit muss $1+i$ multipliziert werden, damit das Produkt eine reelle Zahl wird?

Die Antwort lautet $(1+i)\cdot(1-i)=2$. Und somit

$$\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,i$$

Merke: Wird ein Bruch mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert, so wird der Nenner reell.

Dieses Vorgehen funktioniert für jede Division von zwei komplexen Zahlen.

$$\frac{4+3i}{5+2i}=\frac{(4+3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)}=\frac{26+7i}{29}=\frac{26}{29}+\frac{7}{29}\,i$$

Division in Normalform

$$\frac{a+ib}{x+iy}=\frac{(ax+by)+i(bx-ay)}{x^2+y^2}\in\mathbb{C}\qquad\text{für } x+iy\neq 0$$

Wichtiger als diese Formel ist es aber, sich die Idee des Erweiterns mit dem komplex konjugierten Nenner zu merken.

21. Berechne

a) $\dfrac{5+3i}{2+4i}$ b) $\dfrac{56+33i}{12-5i}$ c) $\dfrac{13-5i}{1-i}$ d) $\dfrac{a+ib}{x+iy}$

22. Stelle in der Form $x+iy$ dar.

a) $(a+ib)^2$ b) $(a-ib)^2$ c) $(a+ib)^3$ d) $(a-ib)^3$

e) $\dfrac{u-iv}{u+iv}-\dfrac{u+iv}{u-iv}$ f) $(a+ib)^3-(a-ib)^3$ g) $\left(\dfrac{c+id}{i}\right)^4$ h) $\dfrac{(a^4+b^4)+i(2a^4+2b^4)}{a^2-ib^2}$

23. Zeige, dass für $z=x+iy$ und $w=a+ib$ folgende Aussagen gelten.

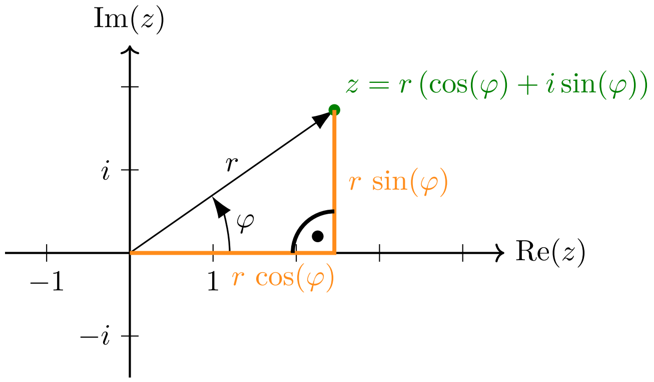
a) $\overline{z}\cdot\overline{w}=\overline{z\cdot w}$ b) $\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}=\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$

24. Vereinfache folgende Terme.

a) $\overline{\left(\dfrac{1+i+\overline{2-i}}{i(1-i)}\right)}$ b) $\overline{\left(\dfrac{iz+\overline{z}}{i\,\overline{z}}\right)}-\dfrac{\overline{z}}{z}$

1.3 Die Polarform

Ein Punkt in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem ist durch die Angabe seiner kartesischen Koordinaten x und y eindeutig bestimmt. Ein Punkt kann auch durch den Winkel φ (von der positiven x-Achse aus im Gegenuhrzeigersinn gemessen) und den Abstand r (vom Ursprung) eindeutig bestimmt werden. Diese Darstellung heisst Polardarstellung.



Somit kann jede komplexe Zahl $z=x+iy$ in der Form $z=r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ dargestellt werden.

Die Polarform einer komplexen Zahl

Jede komplexe Zahl $z=x+iy$ kann in der Form

$$z=r\big(\cos(\varphi)+i\ \sin(\varphi)\big)=r\,\mathrm{cis}(\varphi)$$

dargestellt werden.

Das Paar $(r,\angle\varphi)$, bestehend aus dem **Betrag** $r=|z|$ und dem **Argument** $\varphi=\arg(z)$, bildet die Polarform der komplexen Zahl z.

Dabei ist $r\in\mathbb{R}_0^+$ und $\varphi\in[0°,\,360°[$ im Gradmass, resp. $\varphi\in\,]-\pi,\,\pi]$ im Bogenmass.

Es kann jederzeit von der einen Darstellung in die andere gewechselt werden. Dazu können die folgenden Umrechnungsformeln verwendet werden.

Polarform → Normalform

Gegeben ist $z = r\,\text{cis}(\varphi)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Normalform → Polarform

Gegeben ist $z = x + iy$.

Dann gilt im **Bogenmass**:

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \widehat{\varphi} &= \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{wenn } z \text{ im 1. oder 4. Quadranten liegt} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{wenn } z \text{ im 2. Quadranten liegt} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{wenn } z \text{ im 3. Quadranten liegt} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Oder im **Gradmass**:

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{wenn } z \text{ im 1. Quadranten liegt} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180° & \text{wenn } z \text{ im 2. oder 3. Quadranten liegt} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 360° & \text{wenn } z \text{ im 4. Quadranten liegt} \\ 90° & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ 270° & \text{für } x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Für das Rechnen ohne Taschenrechner sind die folgenden Tabellen hilfreich.

Winkel im Gradmass

φ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	undef.

Winkel im Bogenmass

$\widehat{\varphi}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\widehat{\varphi})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\widehat{\varphi})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\widehat{\varphi})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	undef.

Die komplexe Zahl $z = 2 + 2i$ lautet in Polarform $z = 2\sqrt{2}\,(\cos(45°) + i\sin(45°))$.

25. Stelle die Zahl in Polarform dar. Verwende keinen Taschenrechner.

a) 2 b) $1 + i$ c) $2 - 2i$ d) $-1 + i$

e) $-4 - 4i$ f) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ g) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ h) -4

26. Stelle die Zahl in Polarform dar.

a) 45 b) -98 c) $77i$ d) $-i$
e) $-3-3i$ f) $2+2\sqrt{3}\,i$ g) $-3+\sqrt{27}\,i$ h) $-5+3i$

27. Stelle die Zahl in Normalform dar.

a) $2\operatorname{cis}(0°)$ b) $\operatorname{cis}(60°)$ c) $\sqrt{2}\operatorname{cis}(270°)$ d) $5\operatorname{cis}(330°)$

28. Stelle die in beschreibender Form gegebene Zahlenmenge graphisch dar.

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq \sqrt{5}\}$ c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = 45°\}$
d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 3 \text{ und } 180° \leq \arg(z) \leq 270°\}$

29. Gib von der zugehörigen Zahlenmenge eine beschreibende Form an.

a) Kreislinie mit Zentrum $M = 0$ und dem Radius $R = 5$.
b) Kreisbogen mit dem Zentrum $M = 0$ und den Endpunkten $A = \sqrt{3} + i$ und $B = 1 + \sqrt{3}i$.
c) Gerade, die durch die Punkte $A = -1 - i$ und $B = 1 + i$ geht.
d) Strecke mit den Endpunkten $A = -\sqrt{3} + 3i$ und $B = -3\sqrt{3} + 9i$.

30. Stelle die Zahlen für $n \in \mathbb{Z}$ als Punkte der Zahlenebene dar.

a) $z_n = \operatorname{cis}(n \cdot 90°)$ b) $z_n = \operatorname{cis}(n \cdot 60°)$
c) $z_n = \operatorname{cis}(30° + n \cdot 120°)$ d) $z_n = \operatorname{cis}(160° + n \cdot 45°)$

31. **Forschungsauftrag:** Untersuche Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen auf ihre geometrischen Eigenschaften.

a) Wie kannst du zwei komplexe Zahlen geometrisch miteinander multiplizieren?

Hinweis: Mache zuerst ein paar Beispiele. Wenn du keinen Zusammenhang zwischen den zwei komplexen Zahlen und ihrem Produkt findest, versuche Folgendes:
- Konzentriere dich auf eine Eigenschaft/Kenngrösse z.B den Betrag
- Mache verschiedene Beispiele, verändere dabei immer nur eine Komponente

b) Wie kannst du zwei komplexe Zahlen geometrisch durcheinander dividieren?

Leite die Eigenschaften der Division aus den Eigenschaften der Multiplikation her.

Zusammengefasst sind dies die folgenden Rechenregeln.

Rechenregeln für komplexe Zahlen in Polarform
Für $z = r\operatorname{cis}(\alpha)$ und $w = q\operatorname{cis}(\beta)$ gelten:
- $z \cdot w = rq\operatorname{cis}(\alpha + \beta)$
- $\frac{z}{w} = \frac{r}{q}\operatorname{cis}(\alpha - \beta)$
- $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\alpha)$
- $z^n = r^n\operatorname{cis}(n \cdot \alpha)$ (Formel von de Moivre)
- $\overline{z} = r\operatorname{cis}(-\alpha)$
- $-z = r\operatorname{cis}(\alpha + 180°)$

32. Berechne das Produkt und vereinfache soweit wie möglich.

a) $\sqrt{2}\operatorname{cis}(43°) \cdot \sqrt{18}\operatorname{cis}(27°)$ b) $3\operatorname{cis}(245°) \cdot 13\operatorname{cis}(150°)$ c) $95\operatorname{cis}(182°) \cdot \frac{1}{5}\operatorname{cis}(223°)$

33. Berechne z^n, $n = 2, 3, \ldots, 10$ in der Polarform.

 a) $z = \cos(60°) + i\sin(60°)$ b) $z = 3\operatorname{cis}(315°)$

34. Berechne den Quotienten und vereinfache soweit wie möglich.

 a) $\dfrac{87\operatorname{cis}(105°)}{29\operatorname{cis}(15°)}$ b) $\dfrac{63\operatorname{cis}(233°)}{7\operatorname{cis}(98°)}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{cis}(5°)}{2\operatorname{cis}(215°)}$

35. Berechne den folgenden Quotienten. Entscheide, ob du in Normal- oder Polarform rechnen willst. Gib das Resultat in Normalform an.

 a) $w = \dfrac{\operatorname{cis}(45°)}{\operatorname{cis}(105°)}$ b) $w = \dfrac{4+4i}{2\operatorname{cis}(135°)}$

36. Gegeben ist die Zahl $z = 3\operatorname{cis}(15°)$.
Berechne für die folgenden Zahlen w jeweils wz und $\frac{z}{w}$ und beschreibe die gegenseitige Lage von z und w.

 a) $w = 2$ b) $w = \frac{1}{2}$ c) $w = \operatorname{cis}(45°)$ d) $w = 2i$

37. Gib zur Zahl z die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ und die Gegenzahl $-z$ in Polarform an.

 a) $4\operatorname{cis}(60°)$ b) $\frac{1}{3}\operatorname{cis}(45°)$

38. Es sind $z_1 = 3 + 6i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = -12i$. Berechne

 a) $\arg(z_1 - z_2)$ b) $|z_1 + 2i \cdot z_2|$ c) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_3}\right)$

 d) $\arg(z_1^2 \cdot z_2)$ e) $\left|\dfrac{z_1}{12 + z_2}\right|$ f) $\arg\left(\dfrac{z_2 + 3}{z_1}\right)$

39. Berechne die folgenden Terme. Entscheide dabei, ob du in Polar- oder Normalform rechnen willst. Gib die Ergebnisse in Normal- und Polarform an.

 a) $\left(\dfrac{2-2i}{1+i}\right)^3$ b) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$ c) $w = \dfrac{(1-\sqrt{3}\,i)^9}{(-1+i)^{15}}$ d) $\left(\dfrac{2-2i}{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})\,i}\right)^3$

1.4 Die Exponentialform

Die Exponentialform ist eine weitere Darstellungsmöglichkeit einer komplexen Zahl.

Die Exponentialform einer komplexen Zahl

Eine komplexe Zahl in Exponentialform hat die Form $z = r\,e^{i\varphi}$.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Exponentialform einer komplexen Zahl herzuleiten. Eine elegante Variante verwendet Taylor-Reihen. Eine Variante ohne Taylor-Reihen befindet sich im Anhang 6.1.

Zuerst muss die *Formel von Euler* bewiesen werden. Sie wird aus den folgenden Taylor-Reihenentwicklungen hergeleitet.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

40. Setze in der Reihenentwicklung von e^x anstelle von x den Term $i\varphi$ ein. Begründe damit die untenstehende Formel von Euler.

Formel von Euler
Es gilt $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Damit folgt sofort die Exponentialform der komplexen Zahl $z = a + ib = r\,\mathrm{cis}(\varphi) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r\,e^{i\varphi}$.

Somit kann jede komplexe Zahl auch in der Exponentialform dargestellt werden, zum Beispiel mit einem Umweg über die Polarform.

$z = 1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}(45°) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

In diesem Themenheft wird in der Polarform das Gradmass und in der Exponentialform das Bogenmass verwendet.

41. Stelle die komplexe Zahl in Exponentialform dar.

    a) $z = \mathrm{cis}(30°)$ b) $z = 100\,\mathrm{cis}(140°)$ c) $z = 3 - 3i$

42. Setze in der Formel von Euler für φ die Zahl π ein. Bringe die Gleichung in die Nullform. Versetze dich nun in die Gedankenwelt deiner Mathematiklehrperson. Welche mathematischen Inhalte kannst du in dieser Gleichung erkennen?

Mit Hilfe der Exponentialform können nun auch Potenzen mit komplexen Exponenten berechnet oder Logarithmen an negativen Stellen ausgewertet werden.

Es ist $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ und somit $z = 2^i = \left(e^{\ln(2)}\right)^i = e^{i\ln(2)} = \mathrm{cis}(\ln(2))$.

Analog kann auch der Wert für i^i berechnet werden: $i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

43. Berechne $z = \ln(1 + i)$.
    Überlege dir wie der Logarithmus definiert ist und gib das Resultat in Normalform an.

44. Stelle die komplexe Zahl in Exponentialform dar.

    a) $z = (-16)^i$ b) $z = (-2 + 2i)^{1-i}$ c) $z = (2i)^{2i}$
    d) $z = 2^{\frac{i}{2}}$

45. Stelle die komplexe Zahl in Normalform dar.

    a) $z = 3\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ b) $z = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ c) $z = \frac{3}{5}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$
    d) $z = \ln(-1)$ e) $z = \ln(2i)$

46. Vereinfache folgende Ausdrücke und stelle das Resultat in der Exponentialform dar.

    a) $3\,e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $\dfrac{2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\frac{1}{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ c) $\left(5\,e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2$
    d) $\sqrt{16\,e^{i\pi}}$ e) $3\,e^{i\frac{2\pi}{3}} + 4\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

47. Stelle die Zahlen für $n \in \mathbb{Z}$ als Punkte der Zahlenebene dar.

    a) $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{5}}$ b) $z_n = e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{9})}$

Mit der **Formel von Euler** können die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ durch komplexe Exponentialfunktionen ausgedrückt werden.

Es gilt: $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{i\,x} - e^{-i\,x})$ und $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{i\,x} + e^{-i\,x})$

48. Leite diese Beziehungen mithilfe der **Formel von Euler** her.

49. Beweise mit den in der letzten Aufgabe bewiesenen komplexen Beziehungen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ die folgenden Additionstheoreme.

    a) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
    b) $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
    c) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
    d) $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

1.5 Vermischte Aufgaben zur Repetition

50. Gib die Polar- und die Exponentialform der folgenden komplexen Zahlen an.

    a) $8+8i$ b) $-\sqrt{3}+i$ c) $-\sqrt{3}-3i$ d) $3-\sqrt{3}\,i$

51. Berechne exakt und ohne Taschenrechner.

    a) $\cos(15°)$ b) $\sin(15°)$ c) $\sin(105°)$ d) $\cos(165°)$

52. Gib die Normalform der folgenden komplexen Zahlen an.

    a) $\sqrt{8}\operatorname{cis}(135°)$ b) $\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$

53. Vereinfache die folgenden Ausdrücke in der Exponentialform.

    a) $7\,\mathrm{e}^{i\pi}\cdot(-2)\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$
    b) $\dfrac{6\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}}{-3\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}$
    c) $\left(-2\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{7}}\right)^7$
    d) $\left(\sqrt[3]{27}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4$

54. Bestimme die Faktorzerlegung der Summe $4a^2+b$, wobei $a,\, b \in \mathbb{R}^+$.

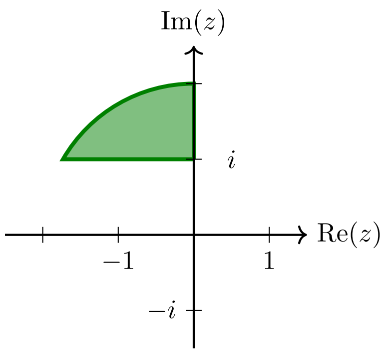
55. Vereinfache folgende Terme. Gib das Resultat in Normalform an.

    a) $\left(\dfrac{2}{1-i}\right)^3 - \left(\dfrac{i-1}{2i}\right)^2$
    b) $\operatorname{Im}\left(\left(\dfrac{ia-b}{i}\right)^3\right)$

56. Markiere die folgende Zahlenmenge in der Gauss'schen Zahlenebene.

    $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 0° < \arg(z) < 135° \text{ und } |z| \le 3 \text{ und } \operatorname{Re}(z) \ge -1\right\}$

57. Gib die unten markierte Zahlenmenge in Mengendarstellung an.



58. Stelle in der Gauss'schen Zahlenebene die Menge aller Punkte dar, für die gilt.

a) $|z| = 1$ b) $|z - (1 + i)| = 1$ c) $|z + 1 + i| = 2$
d) $|z - 2 - 2i| \leq 3$ e) $|z - 1| = |z - 3|$

59. Bei dieser Aufgabe soll die geometrische Eigenschaft der Multiplikation zweier komplexer Zahlen verwendet werden. Gegeben ist der Punkt $P(-3|\sqrt{27})$. Betrachte die Drehstreckung um den Ursprung mit Drehwinkel $\alpha = 60°$ und Streckfaktor $s = 2$. Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes P'.

60. Stelle in der Gauss'schen Zahlenebene die Menge aller Punkte z dar.

a) $z = -z$ b) $z \cdot \overline{z} = 4$ c) $\frac{1}{z} = z$ d) $\frac{1}{z} = \overline{z}$

61. Stelle die folgenden **Kegelschnitte** in der komplexen Ebene dar.

a) $\mathrm{Re}(z) + 1 = |z|$ b) $|z - i| + |z + i| = 3$ c) $\big||z - \sqrt{2}\,i| - |z + \sqrt{2}\,i|\big| = 2$

2 Gleichungen

2.1 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

Lineare Gleichungen können in $\mathbb{C}$ genau gleich gelöst werden wie in $\mathbb{R}$.

1. Löse folgende Gleichungen und stelle die Lösung in Normalform dar.

   a) $5z = 8iz + (81 - 5i)$ b) $(2-i)z + i = 2 + z$

   c) $z = \dfrac{3z+i}{2-2i}$ d) $z - i(4+z) = 3(z-2) + 5i$

   e) $z(2-2i) = 3z + i$ f) $3z + 9i = iz - 4$

   g) $i(i+z) - (5+2i) = i(i-z) + 8$ h) $3i = \dfrac{7-2i-z}{z+4+3i}$

In den folgenden Gleichungen kommen z und die zu z konjugiert komplexe Variable $\overline{z}$ vor.

2. Setze $z = x + iy$ und löse anschliessend ein reelles Gleichungssystem für x und y.

   a) $z + 2i\,\overline{z} = 8 + 7i$ b) $\dfrac{\overline{z}+i}{z-i} = 1$ c) $4z^2 - 4\,\overline{z} + 1 = 0$

   d) $2z - i\,\overline{z} = 1$ e) $z + 2\,\overline{z} = 3 - i$ f) $(1+i)z + (1-i)\,\overline{z} = 1$

3. Bestimme die Lösungsmenge folgender komplexer Gleichungssysteme.

   a) $\left|\begin{array}{rcl} iz - 5w &=& 13 \\ 2z - 3iw &=& 13i \end{array}\right|$ b) $\left|\begin{array}{rcl} (1+i)z + (1-i)w &=& 2-2i \\ (2-3i)z + (-2+2i)w &=& 5+6i \end{array}\right|$

   c) $\left|\begin{array}{rcl} (-4+3i)z + w &=& 9-i \\ (-5+2i)z + w &=& 6-2i \end{array}\right|$ d) $\left|\begin{array}{rcl} 3z + 2w &=& 7+i \\ 5z - 3w &=& -1+8i \end{array}\right|$

   e) $\left|\begin{array}{rcl} \frac{1}{i}z + (2-i)w &=& 0 \\ 2z - (1-i)w &=& 2 \end{array}\right|$ f) $\left|\begin{array}{rcl} w - 4z &=& 9-3iz \\ 2i(z+i+1) &=& 6-w+5z \end{array}\right|$

2.2 Gleichungen der Form $z^n = c$

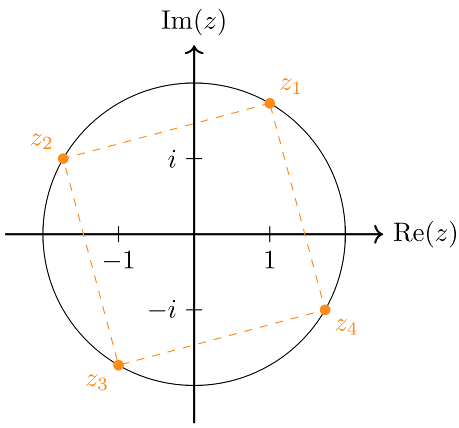
Das Wurzelziehen bzw. das Lösen von Gleichungen der Form $z^n = c$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{C}$ ist in den komplexen Zahlen etwas komplizierter als in den reellen Zahlen. Grundsätzlich wird dabei die Polar- oder die Exponentialform verwendet. Die Gleichung $z^n = c$ hat für $c \neq 0$ genau n verschiedene komplexe Lösungen, die gleichmässig auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt[n]{|c|}$ verteilt sind. Die Lösungen bilden ein regelmässiges n-Eck.

Beispiel

Betrachte die Gleichung $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}\,i$. Bilde nun die Polarform, so erhältst du $(r\,\mathrm{cis}(\varphi))^4 = 16\,\mathrm{cis}(240°)$ und mit der Formel von *de Moivre* $r^4\,\mathrm{cis}(4\varphi) = 16\,\mathrm{cis}(240°)$. Es muss gelten: $r^4 = 16$ somit $r = 2$ und $4\varphi = 240° + n \cdot 360°$ damit $\varphi = 60° + n \cdot 90°$.

Wir erhalten die Lösungen:

$$\begin{array}{rcl} z_1 &=& 2\,\mathrm{cis}(60° + 0 \cdot 90°) = 2\,\mathrm{cis}(60°) \\ &=& 1 + \sqrt{3}\,i \\ z_2 &=& 2\,\mathrm{cis}(60° + 1 \cdot 90°) = 2\,\mathrm{cis}(150°) \\ &=& -\sqrt{3} + i \\ z_3 &=& 2\,\mathrm{cis}(60° + 2 \cdot 90°) = 2\,\mathrm{cis}(240°) \\ &=& -1 - \sqrt{3}\,i \\ z_4 &=& 2\,\mathrm{cis}(60° + 3 \cdot 90°) = 2\,\mathrm{cis}(330°) \\ &=& \sqrt{3} - i \end{array}$$

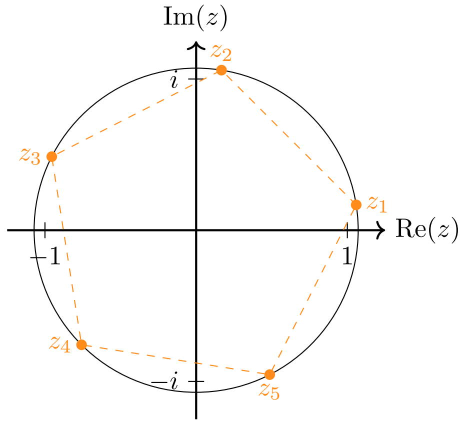


Anstelle der Polarform kannst du auch die Exponentialform verwenden.

Beispiel

Aus $z^5 = 1 + i$ ergibt sich in Exponentialform $z^5 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$

Eine erste Lösung ist $z_1 = \sqrt[5]{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{5}} = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{20}} \approx 1.06 + 0.17i$



Die weiteren Lösungen sind:

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi}{5})} \approx 0.17 + 1.06i \\ z_3 &= \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{20}+\frac{4\pi}{5})} \approx -0.95 + 0.49i \\ z_4 &= \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{20}+\frac{6\pi}{5})} \approx -0.76 - 0.76i \\ z_5 &= \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{20}+\frac{8\pi}{5})} \approx 0.49 - 0.95i \end{aligned}$$

4. Bestimme die Lösungen folgender Gleichungen unter Verwendung der Polarform. Stelle das Resultat anschliessend wieder in Normalform dar, falls dies exakt möglich ist.

   a) $z^2 = i$ b) $z^3 = 8$

   c) $iz^4 = 1 - i$ d) $z^5 = 1$

5. Bestimme die Lösungen folgender Gleichungen unter Verwendung der Exponentialform. Stelle das Resultat anschliessend wieder in Normalform dar, falls dies exakt möglich ist.

   a) $z^5 = -16 + 16\sqrt{3}\,i$ b) $iz^3 + 2 = 0$

   c) $(z - i)^3 = i$ d) $z^3 = -2 - 2i$

2.3 Quadratische Gleichungen

2.3.1 Quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen in $\mathbb{R}$ bleibt mit kleinen Anpassungen auch für quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$ gültig:

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Für eine quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit Koeffizienten a, b, $c \in \mathbb{R}$ gilt:

Ist die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ positiv oder Null, so ändert sich nichts an der Lösungsformel.

Ist D negativ, so sind die Lösungen $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$

Bemerkung: Sind die Koeffizienten einer quadratischen Gleichung reell, so sind die komplexen Lösungen dieser Gleichung paarweise konjugiert komplex.

6. Begründe die oben angegebene Bemerkung.

7. Löse folgende Gleichungen.

   a) $z^2 - 6z + 13 = 0$ b) $z^2 + z + 1 = 0$

   c) $z^2(2 + z^2) = 15$ d) $4z^2 + 8z + 5 = 0$

   e) $\frac{4}{5}z - \frac{1}{5}z^2 = -9$ f) $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$

   g) $2z^2 + 2z + 5 = 0$ h) $z^5 - 2z^4 + 2z^3 = 0$

Etwas anspruchsvoller sind Aufgaben, in denen die Diskriminante zuerst in ein Binom der Form $(a+b)^2$ umgewandelt werden muss.

8. Löse folgende quadratische Gleichungen.

   a) $z^2 - iz + i = z$

   b) $4z(z-2i) - 3 = 5(z-i)$

   c) $z^2 - 2iz = 1 + 8i$

2.3.2 Allgemeine quadratische Gleichungen

Sind die Koeffizienten einer quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ komplex, so behält die Lösungsformel ihre Gültigkeit. Es müssen aber einige Details beachtet werden.

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Die Lösungen z_1, z_2 einer quadratische Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit Koeffizienten a, b, $c \in \mathbb{C}$ sind bestimmt durch $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm w}{2a}$, wobei w eine Lösung der Gleichung $w^2 = D$ ist.

$D = b^2 - 4ac$ heisst wiederum **Diskriminante**.

Beispiel

Betrachte die Gleichung $z^2 + (5-7i)z - 12 - 20i = 0$.

Die Diskriminante ist $D = (5-7i)^2 - 4(-12-20i) = 24 + 10i$. Um nun die Gleichung $w^2 = D$ zu lösen, schreibst du $24 + 10i$ in Polar- oder Exponentialform um.

$D = 24 + 10i = 26\,\mathrm{e}^{0.3948...\,i}$ und somit ist $w = \sqrt{26}\,\mathrm{e}^{0.1974...\,i} = 5 + i$. (Die zweite Lösung für w ist $-5 - i$.)

Es gilt $z_{1,2} = \dfrac{-5 + 7i \pm (5+i)}{2}$ und somit für die Lösungen $z_1 = 4i$, $z_2 = -5 + 3i$

9. Löse folgende Gleichungen.

   a) $z^2 + (2+2i)z + 3i = 0$

   b) $z^2 + i = 1 - 2iz$

   c) $4z^3 - 5z^2 + 4iz - 5i = 0$

   d) $z^6 + (1+i)z^3 + i = 0$

10. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

    a) $z^2 + iz + 3i + 1 = 0$

    b) $1 - \dfrac{2i}{z} = iz$

    c) $iz^4 - z^2 + 2iz^2 - 2 = 0$

    d) $z^6 + 7iz^3 + 8 = 0$

2.4 Allgemeine Gleichungen 3. Grades

Historisches:
Gleichungen 3. Grades waren schon den Griechen und den Babyloniern bekannt. Sie treten z. B. beim Problem auf, einen beliebigen Winkel mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu teilen. (Literatur: Joachim Engel Komplexe Zahlen und ebene Geometrie [1], Albert A. Gächter 7 Zahlstocher [2])

Der erste, der ein algebraisches Verfahren zur Auflösung der allgemeinen Gleichung 3. Grades entdeckte, war der italienische Mathematiker Scipione del Ferro (ca. 1465-1526). Er fand die Lösung um 1500, verriet sie aber nur wenigen engen Freunden. Um 1530 wurde die Lösung von Niccolo Fontano (1499-1557), genannt Tartaglia, wiederentdeckt. Tartaglia verriet seine Methode dem Mathematiker und Arzt Geronimo Cardano (1501-1576) unter Schweigepflicht. 1545 veröffentlichte Cardano die Formeln in seiner *ars magna de regulis algebraicis*. Mit der Zeit hat sich der Name *Formel von Cardano* eingebürgert.

2.4.1 Die Formel von Cardano

Auf eine vollständige Herleitung der Formel wird verzichtet.[1]

Schritt 1:
Jede Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kann durch Substitution $x = z - \frac{a}{3}$ in die *reduzierte Form* $z^3 + pz + q = 0$ gebracht werden.

Es ist $p = b - \frac{a^2}{3}$ und $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

Somit genügt es, eine Methode zum Lösen der reduzierten Gleichung zu finden.

Schritt 2:
Für $z^3 + pz + q = 0$ mit $p \neq 0$ und$q \neq 0$ gilt folgendes Verfahren:

i) Löse die Gleichung $w^2 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ und bezeichne eine Lösung mit w_1. Der Ausdruck $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ heisst *Diskriminante*.

   (Ist $w_1 = 0$, so hat die Gleichung eine Doppellösung.)

ii) Löse die Gleichung $u^3 = -\frac{q}{2} + w_1$ und bezeichne die Lösungen mit u_1, u_2, u_3.

iii) Die Lösungen für z sind nun $z_1 = u_1 - \frac{p}{3u_1}$, $z_2 = u_2 - \frac{p}{3u_2}$, $z_3 = u_3 - \frac{p}{3u_3}$

Bemerkung: Ist die Diskriminante $D > 0$, so gibt es eine reelle und zwei zueinander konjugiert komplexe Lösungen.
Ist $D = 0$, so gibt es drei reelle Lösungen, von denen mindestens zwei zusammenfallen.
Ist $D < 0$, so gibt es drei reelle Lösungen, welche nur über den Umweg mit komplexen Zahlen bestimmt werden können (*casus irreducibilis*).

Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$.

Schritt 1:
Zuerst teilst du durch 2 und erhältst $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = 0$. Nun bestimmst du die reduzierte Gleichung $z^3 + pz + q = 0$.

Es wird $p = -\frac{3}{4}$ und $q = -\frac{1}{4}$ und damit die reduzierte Gleichung $z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4} = 0$.

Schritt 2:

i) Als nächstes bestimmst du die Diskriminante $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$. Sie wird 0 und damit $w = 0$.

ii) Die Lösungen der Gleichung $u^3 = -\frac{q}{2} + w_1$ werden damit $u_1 = \frac{1}{2}$ und $u_{2,3} = \frac{-1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

iii) Die Lösungen der reduzierten Gleichung sind mit $z_{1,2,3} = u_{1,2,3} - \frac{p}{3u_{1,2,3}}$ und somit $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\frac{1}{2}$.

Schliesslich erhältst du mit $x = z - \frac{a}{3}$ die Lösungen der ursprünglichen Gleichung: $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_{2,3} = -1$. ⌟

11. Eine Gleichung 3. Grades mit reellen Koeffizienten hat immer mindestens eine reelle Lösung. Zeige dies, indem du mit den Nullstellen einer Polynomfunktion 3. Grades vergleichst.

12. Historisch gesehen traten komplexe Zahlen zuerst beim Lösen von Gleichungen 3. Grades auf. Löse die Gleichung $z^3 - 6z + 4 = 0$ mit der Formel von Cardano und zeige, dass die reelle Lösung $z = 2$ mit einem Umweg über komplexe Zahlen erhalten wird. Wähle dazu diejenige Lösung für u mit dem kleinsten Argument.

13. Löse folgende Gleichungen mit der Formel von Cardano.

    a) $z^3 - 26z + 60 = 0$ b) $z^3 - 3z^2 - 3z + 9 = 0$ c) $z^3 + 6iz + 4 + 4i = 0$

[1] Bei Joachim Engel[1] findet sich eine ausführliche Herleitung mit viel Historischem

2.5 Allgemeine Gleichungen 4. Grades

Wie im letzten Abschnitt wird auf die Herleitung des Lösungsverfahrens verzichtet.[2]

Schritt 1:
Jede Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kann durch Substitution $x = z - \frac{a}{4}$ in die reduzierte Form $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ gebracht werden.

Es ist $p = b - \frac{3a^2}{8}$, $q = c - \frac{ab}{2} + \frac{a^3}{8}$ und $r = d - \frac{ac}{4} + \frac{a^2b}{16} - \frac{3a^4}{256}$.

Somit genügt es, eine Methode zum Lösen der reduzierten Gleichung zu finden.

Schritt 2:
Für $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ mit $q \neq 0$ und $r \neq 0$ gilt folgendes Verfahren von Euler:

i) Löse die Gleichung $w^3 + 2pw^2 + (p^2 - 4r)w - q^2 = 0$ und bezeichne zwei beliebige Lösungen mit w_1 und w_2. Diese Gleichung heisst *Resolvente*.

ii) Löse die Gleichung $u^2 = w_1$ und bezeichne eine Lösung mit u_1. Löse die Gleichung $u^2 = w_2$ und bezeichne eine Lösung mit u_2.

iii) Die Lösungen für z sind nun $z_1 = \frac{1}{2}\left(u_1 + u_2 - \frac{q}{u_1u_2}\right)$, $z_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 - u_2 + \frac{q}{u_1u_2}\right)$, $z_3 = \frac{1}{2}\left(-u_1 + u_2 + \frac{q}{u_1u_2}\right)$, $z_4 = \frac{1}{2}\left(-u_1 - u_2 - \frac{q}{u_1u_2}\right)$

Beispiel

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 30x + 25 = 0$.

Schritt 1:
Die Substitution $x = z - \frac{3}{2}$ führt auf die Gleichung $z^4 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + \frac{85}{16} = 0$.

Schritt 2:

i) Damit wird die *Resolvente* $w^3 + 9w^2 - w - 9 = 0$. Sie hat die Lösungen $1, -1$ und -9.

ii) Mit $u^2 = w_1$ und $u^2 = w_2$ erhältst du z. B. die Lösungen $u_1 = 1$ und $u_2 = i$.

iii) Mit diesen lassen sich die Lösungen der Gleichung $z^4 + \frac{9}{2}z^2 + 3z + \frac{85}{16} = 0$ berechnen, $z_1 = \frac{1}{2} + 2i$, $z_2 = \frac{1}{2} - 2i$, $z_3 = -\frac{1}{2} - i$,$z_4 = -\frac{1}{2} + i$.

Mit $x = z - \frac{3}{2}$ erhältst du schliesslich die Lösungen der ursprünglichen Gleichung $x_1 = -1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$, $x_3 = -2 - i$, $x_4 = -2 + i$.

14. Löse folgende Gleichungen 4. Grades.

a) $z^4 - 2z^2 + 8iz + 5 = 0$
b) $z^4 + 2z^2 + 4z + 2 = 0$
c) $4z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 4z - 5 = 0$

2.6 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ sind algebraisch nicht nach der Unbekannten auflösbar. Der Beweis dafür gelang 1824-1826 dem norwegischen Mathematiker Nils Hendrik Abel. Oft können dennoch (rationale) Lösungen von Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ gefunden werden.

Es gilt folgender Satz:

Sind die Koeffizienten einer Gleichung n-ten Grades $a_nz^n + ... + a_1z + a_0 = 0$ ganze Zahlen, so gilt:

Falls die Gleichung rationale Lösungen $\frac{p}{q}$ besitzt, so ist der Zähler p Teiler des konstanten Glieds a_0 und der Nenner q Teiler von a_n.

[2] In Engel [1] s.83ff findest du eine Herleitung von Ferrari, aus der sich die Methode von Euler ableiten lässt.

Speziell gilt: Ist $a_n = 1$, so hat die Gleichung keine echten Brüche als Lösungen. [3]

Kann gemäss diesem Satz eine Lösung a gefunden werden, so kann das Polynom n-ten Grades auf ein Polynom $(n-1)$-ten Grades reduziert werden.

Beispiel

Die Gleichung $2z^3 - z^2 + 6z - 3 = 0$ hat nur ganzzahlige Koeffizienten.

Falls sie rationale Lösungen hat, kommen folgende Zahlen in Frage: ± 3, ± 1, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{2}$.

Einsetzen dieser Möglichkeiten liefert das Ergebnis: $z_1 = \frac{1}{2}$ ist eine Lösung.

Folglich kannst du das Polynnom $2z^3 - z^2 + 6z - 3$ in der Form $(az^2 + bz + c)(z - \frac{1}{2})$ darstellen.

a, b und c erhältst du entweder durch Koeffizientenvergleich, indem du das Produkt $(az^2 + bz + c)(z - \frac{1}{2})$ ausmultiplizierst, oder durch Division $(2z^3 - z^2 + 6z - 3) : (z - \frac{1}{2})$.

Es wird $a = 2$, $b = 0$ und $c = 6$. Die weiteren Lösungen der Gleichung $2z^3 - z^2 + 6z - 3 = 0$ sind somit $z_2 = \sqrt{3}\,i$ und $z_3 = -\sqrt{3}\,i$.

15. Löse folgende Gleichungen.

a) $2z^3 - 3z^2 + 2z - 3 = 0$

b) $3z^4 + 5z^3 + 4z^2 + 10z - 4 = 0$

c) $z^5 + 3z^4 - z^3 - 7z^2 + 4 = 0$

d) $z^6 + 2z^4 - 5z^2 - 6 = 0$

2.7 Vermischte Aufgaben zur Repetition

16. Berechne jeweils die Lösungsmengen folgender Gleichungen.

a) $(1 + i)z - (2 - iz) = 2iz - i$

b) $\dfrac{z + i}{z - i} = 2 + i$

c) $z + 2i\,\overline{z} = 3 + 3i$

d) $\left| \begin{array}{lcl} 4iz - w & = & -3 + 3i \\ 2z + iw & = & 1 + i \end{array} \right|$

e) $z^2 + iz + 2 = 0$

f) $iz + 2 + i = \dfrac{i - 1}{z}$

g) $(1 + i)z^3 + 2 = 0$

h) $iz^2 + 2z - 3iz - 6 = 0$

i) $z^4 + (3 - i)z^2 - 3i = 0$

[3] Einen Beweis des Satzes findest du bei Engel [1] s. 73ff.

3 Komplexe Folgen

Folgen sind komplexe Funktionen, deren Definitionsmenge die Menge $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ ist.
In diesem Kapitel wird vorausgesetzt, dass *explizite* und *rekursive* Definitionen von (reellen) Folgen sowie *arithmetische* Folgen (1. Ordnung) und *geometrische* Folgen bekannt sind.

3.1 Komplexe Folgen und ihr Verhalten für n gegen Unendlich

Die erste Aufgabe zeigt die Vielfalt der komplexen Folgen und führt auf den Begriff *Zyklus* einer Folge.

1. Gegeben ist das Bildungsgesetz einer Folge. Berechne die ersten paar Glieder der Folge und zeichne die entsprechenden Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene ein. Entscheide dabei, ob es geschickter ist in Normalform oder in Exponentialform zu rechnen. Veranschauliche die ersten Folgeglieder in der Gauss'schen Ebene und beantworte zu jeder Folge die folgenden zwei Fragen.
   Welcher geometrischen Operation entspricht der Schritt von z_n nach z_{n+1}?
   Wie verhält sich die Folge für n gegen Unendlich?

   a) $z_1 = -2-2i,\ z_{n+1} = z_n + 1 + \frac{1}{2}\,i$
   b) $z_1 = -2-2i,\ z_{n+1} = z_n + \dfrac{4+4i}{2^n}$
   c) $z_1 = 2,\ z_{n+1} = \frac{9}{10}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\ z_n$
   d) $z_1 = \frac{1}{2}\,i,\ z_{n+1} = \frac{3}{2}\,i\,z_n$
   e) $z_1 = 2+2i,\ z_{n+1} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\ z_n$
   f) $z_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)\,i^n$

Zyklus
Gibt es für eine unendliche Folge z_n eine natürliche Zahl k, so dass für alle n gilt: $z_{n+k} = z_n$, so bildet die Folge einen Zyklus. Die kleinste dieser Zahlen k bestimmt die **Länge des Zyklus**.

2. Gegeben ist die rekursive Definition der Folge: $z_1 = -i,\ z_{n+1} = z_n + 1 - i$.
   Gib die explizite Definition dieser Folge an und untersuche ihr Verhalten für n gegen Unendlich.

3. Berechne die ersten drei Glieder der Folge $z_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n$ und beschreibe ihr Verhalten für n gegen Unendlich.

4. Gegeben ist die Folge $z_1 = i,\ z_{n+1} = (-1+\sqrt{3}\,i)\,z_n$.
   Untersuche, welche Glieder der Folge reell sind und welche rein imaginär.

5. Gib die explizite und die rekursive Definition einer Folge mit $z_1 = 2$ an, welche einen Zyklus der Länge 12 beschreibt und deren Glieder auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 liegen.

6. Gegeben ist die Folge $z_n = \left(a + \frac{1}{2}\,i\right)^n$. Für welche reellen Werte von a besitzt sie den Grenzwert 0?
   Für welche reellen Werte von a bildet sie einen Zyklus? Gib jeweils die Länge des Zyklus an.

7. Zeige, dass die Folge $z_1 = -2,\ z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2i}\right)\,z_n$ einen Zyklus beschreibt. Gib die Länge k des Zyklus an.
   Die Punkte des Zyklus bilden ein regelmässiges k-Eck. Berechne den Umfang dieses k-Ecks.

8. Die Zahlen $16i,\ -8,\ -4i,\ 2,\ \ldots$ bilden eine komplexe geometrische Folge.

   a) Gib eine rekursive und eine explizite Definition der Folge an.
   b) Welche Glieder der Folge sind von 0 weniger als 0.01 entfernt?
   c) Nun wird jeweils zwischen zwei Glieder der Folge ein weiteres Glied eingefügt, so dass wiederum eine geometrische Folge entsteht. Gib eine explizite Definition dieser neuen Folge an.

9. Eine Folge beschreibt einen 4er-Zyklus mit den komplexen Zahlen $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1+i,\ z_4 = i$.
   Gib eine rekursive und eine explizite Definition dieser Folge an.

3.2 Iterationen, Juliamengen, Mandelbrotmenge

In diesem Abschnitt spielen *Iterationen* eine wichtige Rolle.

Iteration
Gegeben ist eine rekursiv definierte Folge z_n.
Berechnet man ausgehend von einem Startwert z_1 das zweite Glied z_2 der Folge, aus diesem wiederum das dritte Glied z_3, etc. , so spricht man von einer Iteration (iterare...lat. wiederholen).

Beispiel: Aus $z_{n+1} = \frac{3}{2}i\,z_n$ mit $z_1 = i$ folgt: $z_2 = -\frac{3}{2}$, $z_3 = -\frac{9}{4}\,i, \ldots$

Eine Iteration kann auch durch eine Funktion definiert werden, z. B. $f(z) = \frac{3}{2}i\,z$. Bildet man zum Startwert $z_1 = i$ den Funktionswert $f(z_1)$, von diesem wiederum den Funktionswert, etc., so erhält man die gleiche Iteration wie oben durch die Folge z_n.
Gibt man in der Funktion $f(z) = \frac{3}{2}i\,z$ einen anderen Startwert vor, z. B. 1, so erhält man eine andere Folge, in diesem Fall $1, \frac{3}{2}i, -\frac{9}{4}, \ldots$

Die Iteration der Funktion $\mathbf{f(z) = z^2 + c}$
Am einfachsten Fall für die Funktion $f(z) = z^2 + c$, für $c = 0$, lernst du die wichtigsten Begriffe für diesen Abschnitt kennen.

Fixpunkt einer Funktion bzw. einer Abbildung
Ein Fixpunkt ist ein Punkt, welcher auf sich selbst abgebildet wird. In dem Fall gilt $f(z) = z$.

Für die Funktion $f(z) = z^2$ gibt es zwei Fixpunkte, nämlich $p_1 = 0$ und $p_2 = 1$, da $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ ist.

Anziehung und Abstossung
Ein Fixpunkt p heisst *anziehend*, wenn die Iteration mit hinreichend nahe bei p liegendem Startpunkt gegen p als Grenzpunkt strebt.

Ein Fixpunkt p heisst *abstossend*, wenn die Iteration mit hinreichend nahe bei p liegendem Startpunkt vom Fixpunkt p weg strebt.

10. Untersuche, welcher der Fixpunkte von $f(z) = z^2$ anziehend, welcher abstossend ist.

Divergenzpunkt
Ein Divergenzpunkt ist ein Punkt, der bei der Iteration ins Unendliche strebt.

Wird eine komplexe Funktion vorgegeben, so kann die Gauss'sche Zahlenebene in drei Gebiete eingeteilt werden, den *Divergenzbereich*, den *Einzugsbereich* und die *Juliamenge*.

Divergenzbereich
Der Divergenzbereich D besteht aus der Menge aller Divergenzpunkte.

Einzugsbereich
Der Einzugsbereich E entspricht der Menge aus dem anziehenden Fixpunkt und den zugehörigen Startwerten der Iterationen, welche auf diesen Punkt zustreben.

Juliamenge

Die Juliamenge J entspricht der Randmenge zwischen Divergenzbereich und Einzugsbereich.
Die Juliamenge wird benannt nach *Gaston Maurice Julia (1893 - 1978)*.

11. Beschreibe die Mengen D, E und J für die Iteration der Funktion $f(z) = z^2$.

Juliamengen von Funktionen der Art $\mathbf{f(z) = z^2 + c}$ mit $\mathbf{c \neq 0}$

Die folgenden Bilder wurden mit der Programmiersprache *octave* erzeugt. Das Vorgehen ist wie folgt (und in jeder andern Programmiersprache ähnlich).

1) Zuerst wird das c in der Funktion $f(z) = z^2 + c$ festgelegt.
2) Nun wird der Bereich in der Gauss'schen Zahlenebene bestimmt. Für diese Bilder ist dieser $-2 \leq \text{Re}(z) \leq 2$ und $-1 \leq \text{Im}(z) \leq 1$.
3) Ein farbiges Bild wird erzeugt, indem der Bereich der komplexen Zahlenebene in einzelne Pixel zerlegt wird. Je grösser die Anzahl Pixel, umso besser die Auflösung des Bildes. In diesen Bildern ist die Anzahl Pixel in x-Richtung 600 und in y-Richtung 400.
4) Jede komplexe Zahl in diesem Bereich wird nun mit der Funktion $f(z) = z^2 + c$ iteriert und die Anzahl Iterationen bestimmt, die nötig sind, bis der Betrag grösser wird als eine festgelegte Grösse (z. B. 10). Dieser Anzahl Iterationen wird ein bestimmter Farbwert zugeordnet und der entsprechende Pixel damit gefärbt.

Überraschend ist nun, dass die Bilder von Juliamengen für $c \neq 0$ äusserst vielfältig werden.

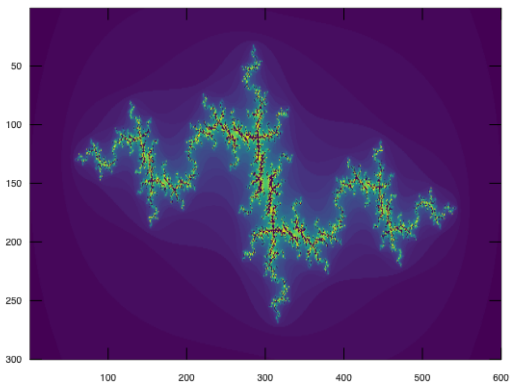


Abbildung 1: $c = -1 + 0.3i$

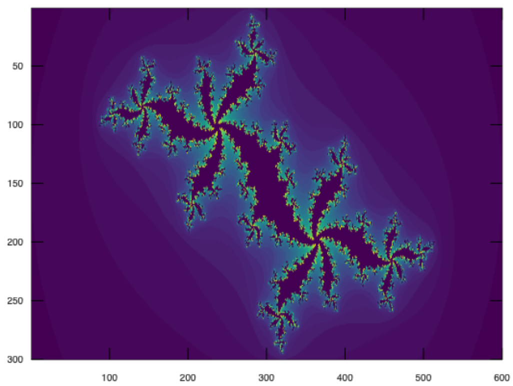


Abbildung 2: $c = -0.5 + 0.6i$

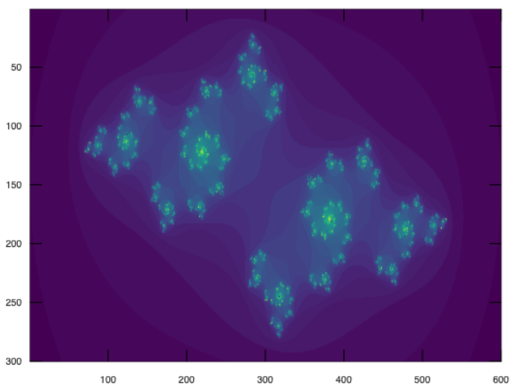


Abbildung 3: $c = -1 + 0.3i$

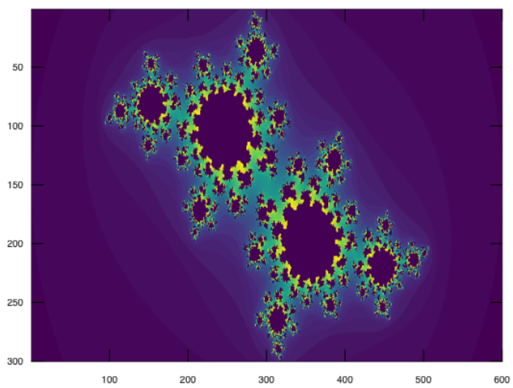


Abbildung 4: $c = -0.5 + 0.6i$

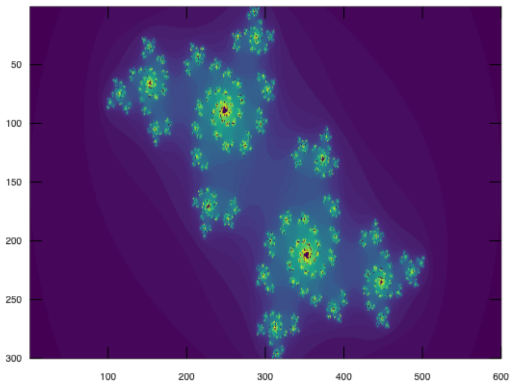


Abbildung 5: $c = -1 + 0.3i$

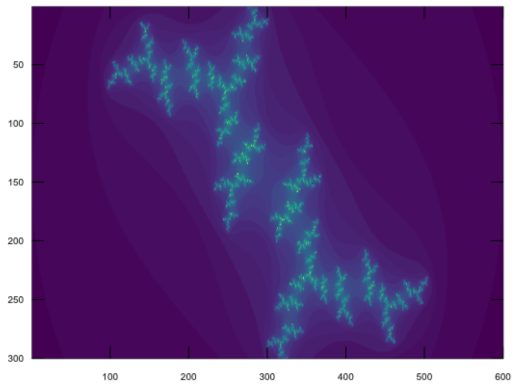


Abbildung 6: $c = -0.2 + 0.9i$

Auf Websites wie z. B.: https://www.mathematik.ch/anwendungenmath/fractal/julia/julia.html befinden sich Applets, mit denen Bilder von Juliamengen mit beliebigen Konstanten c gezeichnet werden können.

Die Mandelbrotmenge (Benannt nach *Benoit Mandelbrot(1924-2010)*)

Mandelbrotmenge

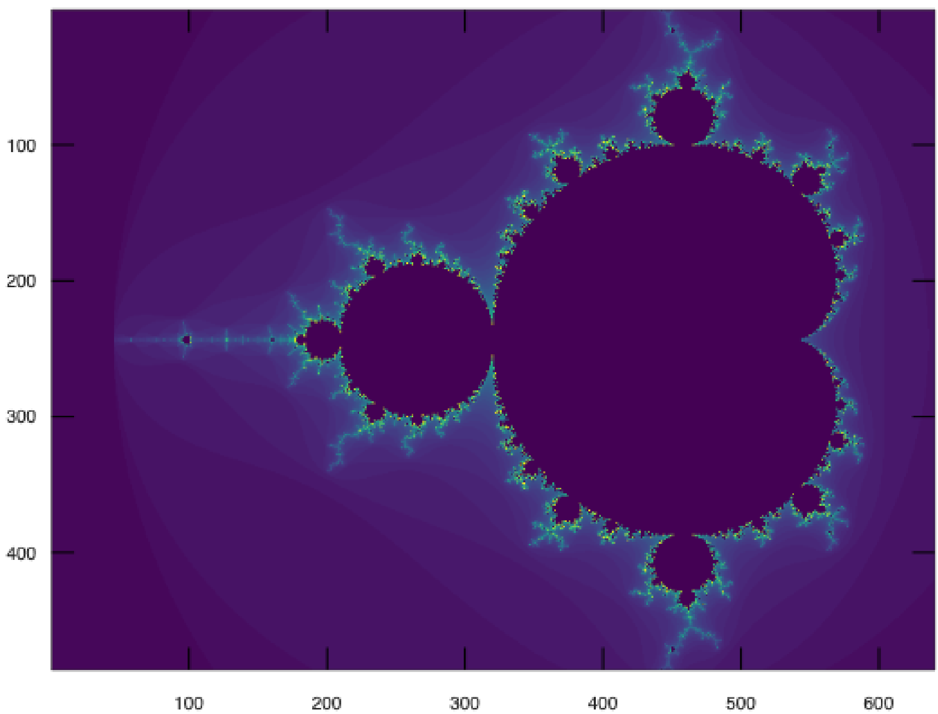
Die Mandelbrotmenge M ist die Menge aller Parameter c, für welche die Iteration mit

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

nicht nach Unendlich divergiert.

Mit anderen Worten: Während zur Bestimmung von Juliamengen bei der Funktion $f(z) = z^2 + c$ die Konstante c festgelegt wird und dann verschiedene Startwerte z_i vorgegeben werden, wird bei der Mandelbrotmenge immer mit dem Startwert $z_1 = 0$ gestartet und es werden verschiedene Werte des Parameters c verwendet.

Das folgende Bild der Mandelbrotmenge wurde ebenfalls mit *octave* erzeugt. Der Bereich der Gauss'schen Zahlenebene ist $-2.2 \le \mathrm{Re}(z) \le 0.7$ und $-1.1 \le \mathrm{Im}(z) \le 1.1$.



Eigenschaften der Mandelbrotmenge:

- M ist ein Fraktal, d. h. es gibt beliebig kleine Ausschnitte von M, welche bei genügender Vergrösserung wieder die Menge M ergeben.
- M ist zusammenhängend.
- M besteht aus unendlich vielen gleichartigen, selbstähnlichen Teilen. Ein solcher Teil besteht aus einer *Herzkurve (Cardioide)*, an der unendlich viele Kreise angehängt sind. Ferner gehören linienartige Antennen und Fäden zu M, welche diese Teile verbinden. Während das Innere der Herzkurve und der Kreise völlig ausgefüllt ist, besteht der Rand aus unbegrenzt vielen, äusserst reichhaltigen Formen.

3.3 Vermischte Aufgaben zur Repetition

12. Gegeben sind die ersten drei Glieder einer geometrischen Folge: $z_1 = i$, $z_2 = 2$, $z_3 = -4i$.

    a) Definiere die Folge explizit und rekursiv. Gib das Verhalten für n gegen Unendlich an.

    b) Finde nun eine Folge des gleichen Typs für die gilt $z_1 = i$, $z_4 = 2$, $z_7 = -4i$. Es gibt mehrere Lösungen.

13. Gegeben ist die Folge $z_n = \left(\left(a\left(\sqrt{3}+i\right)\right)^{n-1}\right.$

    a) Es ist $a = 1$. Berechne die ersten vier Glieder der Folge in Normal- und Exponentialform und zeichne die entsprechenden Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene ein. Wie viele Glieder der Folge z_n sind von 0 weniger als 1000 Einheiten entfernt?

    b) Es ist nun $a = \frac{1}{2}$. Zeige, dass die Folge z_n einen Zyklus bildet und bestimme seine Länge. Die entsprechenden Punkte bilden ein regelmässiges Vieleck. Berechne seinen Umfang und seine Fläche.

    c) Wir betrachten zwei neue Folgen $c_n = 1+i+\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)\right)^{n-1}$ und $d_n = 1+i+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)\right)^{n-1}$, welche mit z_n einiges gemeinsam haben. Beschreibe die Zusammenhänge der drei Folgen.

14. Gegeben ist die Folge $z_n = 2i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right)^{n-1}$.

    a) Berechne die ersten drei Glieder der Folge in Normal- und Exponentialform und zeichne die entsprechenden Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene.

    b) Welches ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $z_1 = z_n$?

    c) Zeichne die Figur, welche für dieses n durch den Streckenzug z_1, z_2, z_3, …,z_n entsteht.

    d) Berechne die Länge dieses Streckenzuges.

4 Komplexe Funktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$

4.1 Darstellung von Kurven in der Gauss'schen Zahlenebene

Eine *Funktion* ordnet die Elemente der *Definitionsmenge* durch eine Funktionsvorschrift eindeutig den Elementen der *Wertemenge* zu. In diesem Kapitel werden Funktionen betrachtet, welche Elementen aus den reellen Zahlen Punkte der Gauss'schen Zahlenebene zuordnen.

Komplexe Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ bzw. Teilmengen von $\mathbb{R}$

Sind $x(t)$ und $y(t)$ reelle Funktionen mit $t \in \mathbb{R}$, so ist die Funktion $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ eine Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und Wertemenge $\mathbb{C}$.

Parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^2$

Sind $x(t)$ und $y(t)$ Funktionen der Variablen t, so beschreiben die Punkte $P\,(x(t)|y(t))$ im $\mathbb{R}^2$ eine *parametrisierte Kurve* mit Parameter t.

Parametrisierte Kurven können auch vektoriell geschrieben werden.

Beispiel

Die Parametrisierung $(x(t)|y(t)) = (1+t|2t)$ entspricht der Parametergleichung der Geraden $\binom{x}{y} = \binom{1}{0} + t\binom{1}{2}$.

Da jeder komplexen Zahl z ein Ortsvektor zu einem Punkt $P(x|y)$ entspricht, stellt eine komplexe Funktion der Art $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ eine spezielle Darstellung einer *parametrisierten Kurve* dar.

Im Folgenden werden verschiedene Kurven mithilfe von komplexen Funktionen dargestellt.

1. **Kreise und Spiralen**
   Beschreibe die Kurven, welche durch die folgenden komplexen Funktionen definiert sind (t im Bogenmass).

   a) $z(t) = \mathrm{e}^{it}$
   b) $z(t) = 2\,\mathrm{e}^{it}$
   c) $z(t) = 3 + 2i + 4\,\mathrm{e}^{it}$
   d) $z(t) = 2t\,\mathrm{e}^{it}$
   e) $z(t) = 2\,\mathrm{e}^{it+0.05t}$
   f) $z(t) = 2\,\mathrm{e}^{it-0.05t}$

Parametrisierung des Kreises

Die Funktion $z(t) = m + r\,\mathrm{e}^{it}$ stellt für $t \in [0, 2\pi[$ eine Parametrisierung des Kreises mit Mittelpunkt m und Radius r dar.

2. **Weitere Kurven**
   Beschreibe die Kurven, welche durch die folgenden komplexen Funktionen definiert sind, wobei $t \in [0, 2\pi[$ im Bogenmass.

   a) $z(t) = \sin(t) + 2i\cos(t)$
   b) $z(t) = 2\,\mathrm{e}^{it} + \cos(t)$
   c) $z(t) = \sin(t)\,\mathrm{e}^{it}$
   d) $z(t) = |\cos(t)|\,\mathrm{e}^{it}$
   e) $z(t) = \sqrt{|\cos(2t)|}\,\mathrm{e}^{it}$
   f) $z(t) = 2e^{it} + e^{2it}$

3. **Funktion und Umkehrfunktion**
   Vergleiche die folgenden zwei Funktionen miteinander. Stelle beide Graphen in der Gauss'schen Zahlenebene dar. Gib jeweils reelle Funktionsgleichungen an.

   a) $z_1(t) = t + i(2t+1)$ und $z_2(t) = 2t + 1 + it$
   b) $z_1(t) = t + i\sin(t)$ und $z_2(t) = \sin(t) + it$, $t \in [0, 2\pi[$
   c) $z_1(t) = t + i\,\mathrm{e}^t$ und $z_2(t) = \mathrm{e}^t + it$

4.2 Drehen und Verschieben von Funktionsgraphen

4. Gegeben ist die Funktion $z(t) = t + it^2$.

   a) Gib die reelle Kurvengleichung in der Form $y = f(x)$ an und zeichne die Kurve in der Gauss'schen Zahlenebene.

   b) Verschiebe die Kurve um 2 Einheiten in Richtung der positiven reellen Achse. Gib die komplexe Funktion dieser neuen Kurve in der Form $z(t)$ an.

   c) Verschiebe die Kurve um 3 Einheiten in Richtung der positiven imaginären Achse. Gib die komplexe Funktion dieser neuen Kurve in der Form $z(t)$ an.

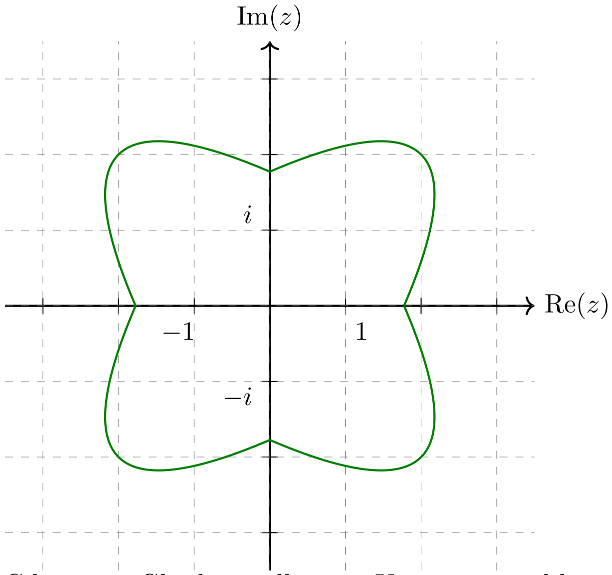
   d) Drehe die Kurve um 45° (Drehzentrum 0). Gib die komplexe Funktion dieser neuen Kurve in der Form $z(t)$ an.

   e) Drehe die Kurve um 30° (Drehzentrum 0)und strecke sie um 2. Gib die komplexe Funktion dieser neuen Kurve in der Form $z(t)$ an.

   f) Drehe die Kurve zuerst um 135° (Drehzentrum 0), strecke sie dann um 4 und verschiebe sie schliesslich um den Vektor $\binom{1}{2}$. Gib die komplexe Funktion dieser neuen Kurve in der Form $z(t)$ an.

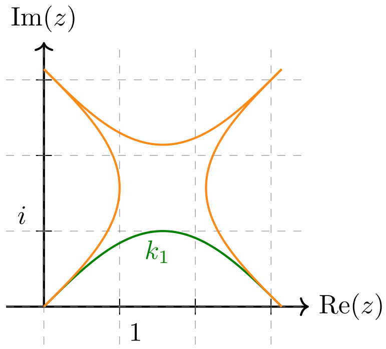
In den folgenden drei Aufgaben werden Kenntnisse aus der Differenzial- und Integralrechnung vorausgesetzt.

5. Die Figur zeigt ein Kleeblatt, dessen Umriss durch Normalparabeln begrenzt wird.



   Gib je eine Gleichung aller vier Kurven an und berechne den Flächeninhalt des Kleeblatts.

6. Betrachte den Graphen k_1 der Funktion $z(t) = t + i\sin(t)$ für $0 \leq t \leq \pi$.
   Dieser Graph begrenzt mit drei weiteren, zu ihm kongruenten Graphen, eine Fläche.

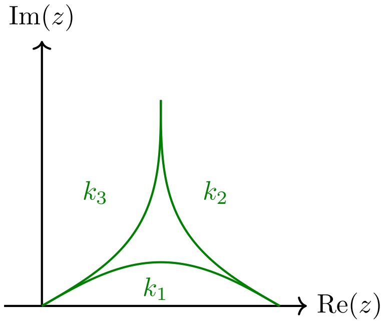


   a) Zeige, dass sich zwei der Graphen im Nullpunkt berühren.

   b) Gib Gleichungen der drei anderen Kurven in der Form $z(t)$ an (Ergebnisse in Normalform).

   c) Berechne den Inhalt der Fläche, welche die vier Graphen umschliessen.

7. Betrachte ein Gebiet, welches durch **drei** Sinuskurventeile auf analoge Art wie in der letzten Aufgabe begrenzt wird.



Gib die Gleichungen von drei solchen Kurven an und berechne den Flächeninhalt des Gebiets.

a) Für die Sinuskurve $f(x) = a\sin(x)$, $a > 0$

b) Für die Sinuskurve $f(x) = \sin(bx)$, $b > 0$

c) Für die Sinuskurve $f(x) = a\sin(bx)$, $a > 0$, $b > 0$, Lösung in Abhängigkeit von a

4.3 Darstellung von Kreisen und Geraden durch komplexe Gleichungen

Im 1. Kapitel wurde die Gleichung $|z - m| = r$ des Kreises mit Mittelpunkt m und Radius r behandelt. Hier wird eine weitere Art den Kreis darzustellen eingeführt, welche beim Abbilden von Kreisen hilfreich sein kann.

Die Kreisgleichung

In der Gauss'schen Zahlenebene kann der Kreis mit Mittelpunkt m und Radius $r = \sqrt{m\,\overline{m} - c}$, (wobei $m \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$ und $m\,\overline{m} - c > 0$), durch eine Gleichung der folgenden Art dargestellt werden.

$$z\,\overline{z} - \overline{m}\,z - m\,\overline{z} + c = 0$$

8. Leite die Gleichung $z\,\overline{z} - \overline{m}\,z - m\,\overline{z} + c = 0$ und deren Eigenschaften aus der Kreisgleichung $|z - m| = r$ her.

9. Verwandle in die Form $|z - m| = r$ und und gib Mittelpunkt und Radius des Kreises an.

a) $z\,\overline{z} - (5 - i)z - (5 + i)\,\overline{z} + 4 = 0$

b) $z\,\overline{z} - (8 + i)z - (8 - i)\,\overline{z} + 49 = 0$

c) $z\,\overline{z} - (1 + 2i)z - (1 - 2i)\overline{z} + 9 = 0$

d) $z\,\overline{z} - (3 - 4i)z - (3 + 4i)\overline{z} + 25 = 0$

10. Gib die Gleichung des Kreises in der Form $z\,\overline{z} - \overline{m}\,z - m\,\overline{z} + c = 0$ an.

a) Kreis mit Mittelpunkt $1 + i$ und Radius 1

b) $|z + 2 - 3i| = 2$

c) $|z - 4 + 6i| = 4$

d) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

Geradengleichung

In der Gauss'schen Zahlenebene kann eine Gerade durch eine Gleichung der Art

$$\overline{b}\,z + b\,\overline{z} + c = 0$$

mit $b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ dargestellt werden.

11. Beweise, dass die Gleichung $\overline{b}\,z + b\,\overline{z} + c = 0$ mit $b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Gerade darstellt.

12. Beweise umgekehrt, dass jede Gerade $px + qy + r = 0$ als komplexe Gleichung $\overline{b}\,z + b\,\overline{z} + c = 0$ mit $b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann.

13. Verwandle die reelle Geradengleichung in eine komplexe und umgekehrt.

a) $y = 2x + 3$
b) $y = -5$
c) $\operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{3}\operatorname{Re}(z) + 4$
d) $\operatorname{Re}(z) = 3$
e) $3iz - 3i\,\overline{z} - 12$
f) $(5 + 2i)z + (5 - 2i)\,\overline{z} + 4 = 0$
g) $(1 + i)z + (1 - i)\,\overline{z} - \frac{1}{2} = 0$
h) $z + \overline{z} + 1 = 0$

14. Diese Aufgabe verbindet die Geradengleichung $\overline{b}\,z + b\,\overline{z} + c = 0$ mit der vektoriellen Darstellung einer Geraden.

a) Zeige: ib ist ein Richtungsvektor der Geraden.
b) Zeige: Wird vom Nullpunkt aus das Lot auf die Gerade gefällt, so ist $-\frac{c}{2\,\overline{b}}$ der Lotfusspunkt und $\frac{1}{2}\frac{|c|}{|b|}$ der Abstand des Nullpunkts von der Geraden.

4.4 Vermischte Aufgaben zur Repetition

15. Gegeben ist die Funktion $z(t) = \mathrm{e}^{it} + \cos(t) + 1$. Welche Kurve wird durch diese Funktion definiert?

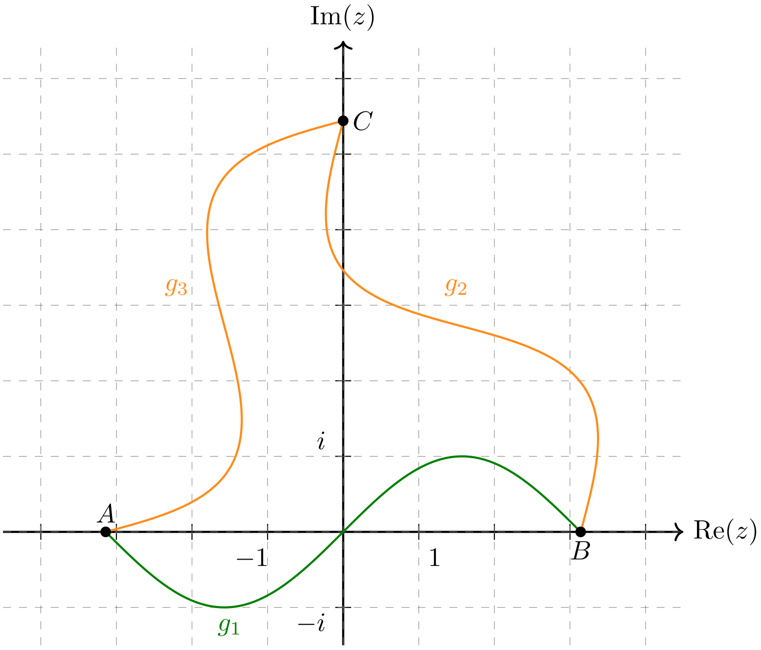
16. Gegeben ist die Funktion $z(t) = \cos(t) + it$ für $t \in [0, \pi]$.

a) Gib eine reelle Funktion an, welche den gleichen Graphen wie $z(t)$ besitzt?
b) Drehe diese Kurve um 90° (Drehzentrum 0) und verschiebe sie anschliessend um $\frac{3\pi}{2}$ nach rechts. Gib eine reelle Funktionsgleichung dieser neuen Kurve an.

17. Gegeben ist die Funktion $z(t) = t + \frac{1}{2}\,it^2$.

a) Skizziere den Graphen dieser Funktion in der Gauss'schen Zahlenebene.
b) Drehe den Graphen im Uhrzeigersinn um 90° (Drehzentrum 0) und gib eine Gleichung der gedrehten Kurve an.
c) Skizziere nun den Graphen der gedrehten Kurve ins gleiche Koordinatensystem und berechne den Inhalt der Fläche, welche die beiden Graphen umschliessen.

18. Die folgende Figur ist durch drei kongruente Sinuskurven begrenzt, dabei entspricht g_1 dem Graphen von $y = \sin(x)$ für $-\pi \leq x \leq \pi$.



a) Beschreibe g_1 durch eine komplexwertige Funktion $z(t)$.

b) Um welchen Punkt D muss g_1 im mathematisch positiven Sinn gedreht werden, um zuerst mit g_2 und danach mit g_3 zur Deckung zu kommen?

c) Gib Gleichungen von g_2 und g_3 an.

d) Bestimme den Winkel im Punkt A.

e) Welchen Inhalt besitzt das durch die drei Kurven g_1, g_2 und g_3 begrenzte Gebiet?

5 Komplexe Funktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{C}$

In diesem Kapitel ist die Definitionsmenge einer komplexen Funktion $\mathbb{C}$. Da komplexe Zahlen als Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene dargestellt werden können, bilden solche komplexen Funktionen Punkte der Gauss'schen Zahlenebene auf Punkte der Gauss'schen Zahlenebene ab.
Oft werden komplexe Abbildungen verwendet, um Kurven (Geraden, Kreise,...) oder Teilgebiete der Gauss'schen Zahlenebene abzubilden.

Bemerkung: Die Begriffe *Funktion* und *Abbildung* werden in diesem Kapitel wie Synonyme verwendet.

Komplexe Funktion (komplexe Abbildung)

Die Funktion $w = f(z)$ ordnet einem Punkt $z \in \mathbb{C}$ jeweils genau einen Punkt $w \in \mathbb{C}$ zu.
Durch diese Zuordnung wird eine Abbildung der Punkte z der Gauss'schen Zahlenebene, der sogenannten *z-Ebene*, auf Punkte w der Gauss'schen Zahlenebene, der *w-Ebene*, definiert.

Für den Punkt $z = x + iy$ werden die Koordinaten $(x|y)$ verwendet. Für den Punkt $w = u + iv$ die Koordinaten $(u|v)$.
Wird der Punkt z auf den Punkt w abgebildet, so heisst w das **Bild** von z und z das **Urbild** von w.

Beispiel

Durch die komplexe Abbildung $w = z^2 + i$ wird die komplexe Zahl i, und damit der Punkt $(0|1)$, auf die komplexe Zahl $w(i) = i^2 + i = -1 + i$, den Punkt $(-1|1)$, abgebildet.

Fixpunkt

Ein Fixpunkt p ist ein Punkt, der durch die Abbildung $w = f(z)$ auf sich selbst abgebildet wird.
Es gilt somit $f(p) = p$.

Beispiel

$w = 2z + i$ besitzt den Fixpunkt $-i$, denn $w(-i) = 2\,(-i) + i = -i$.

5.1 Einführende Aufgaben

In den nächsten beiden Aufgaben werden ein paar einfache Abbildungstypen betrachtet.

1. Interpretiere folgende komplexe Abbildungen geometrisch. Berechne dazu die Bildpunkte von $z_1 = 2+i$, $z_2 = 5+i$ und $z_3 = 5+3i$. Zeichne Urbild- und Bildpunkte in die gleiche Zahlenebene ein. Gib die Fixpunkte der Abbildung an.

   a) $w = z + 4$ b) $w = z$ c) $w = -z$
   d) $w = \overline{z}$ e) $w = 3z$ f) $w = -2z$
   g) $w = z + 2 + 3i$ h) $w = iz$ i) $w = (1 + i)z$
   j) $w = \mathrm{Re}(z)$ k) $w = z\,\overline{z}$ l) $w = z - \overline{z}$

2. Gib die Abbildungsgleichungen der folgenden Abbildungen an.

   a) Translation um $\binom{0}{3}$
   b) Translation um $\binom{-2}{0}$
   c) Zentrische Streckung (Zentrum 0) mit Streckfaktor 4
   d) Drehung um $60°$, Drehzentrum 0
   e) Drehstreckung um 0, Drehwinkel $225°$, Streckfaktor 2

In den folgenden beiden Aufgaben geht es um Drehungen und Streckungen in denen das Streckzentrum nicht der Nullpunkt ist.

3. Interpretiere folgende komplexe Abbildungen geometrisch. Berechne dazu die Bildpunkte von $z_1 = 2+i$, $z_2 = 5+i$ und $z_3 = 5+3i$. Zeichne Urbild- und Bildpunkte in die gleiche Zahlenebene ein. Gib die Fixpunkte der Abbildung an.

   a) $w = (-1+i)z + i$ b) $w = 2(z-3)+3$

4. Gib die Abbildungsgleichungen der folgenden Abbildungen an.

   a) Punktspiegelung am Punkt i
   b) Zentrische Streckung mit Zentrum $2+3i$ und Streckfaktor 2
   c) Drehung um 90°, Drehzentrum $1+i$
   d) Drehstreckung um 45°, Drehzentrum $2-3i$, Streckfaktor 2

In der folgenden Aufgabe soll untersucht werden, wie eine Strecke und deren Mittelpunkt bei verschiedenen Abbildungen abgebildet wird.

5. Gegeben sind die Punkte $A = 1+i$ und $B = 2$. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Berechne die Bildpunkte A', B' und M' unter den folgenden Abbildungen und überprüfe, ob M' der Mittelpunkt von $\overline{A'B'}$ ist.

   a) $w = (2+2i)z$ b) $w = \dfrac{2iz+8}{z-2i}$ c) $w = z^2$ d) $w = 2z+4$

5.2 Lineare Abbildungen

Lineare Funktion (lineare Abbildung)

Eine lineare Funktion ist eine Funktion der Art

$$w = az + b$$

Dabei sind a und b komplexe Zahlen, $a \neq 0$.

Viele Abbildungen in den bisherigen Aufgaben waren *lineare Abbildungen*.
Mithilfe der dort gemachten Erfahrungen können diese geometrisch gedeutet werden.

Geometrische Interpretation linearer Abbildungen

1. Der Fall $a = 1$: $w = z + b$
Da die Addition einer komplexen Zahl $b = b_1 + ib_2$ zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ als Vektoraddition gedeutet werden kann, werden alle Punkte $(x|y)$ um den Vektor $\binom{b_1}{b_2}$ in der Gauss'schen Zahlenebene verschoben.

2. Der allgemeine Fall für $a \neq 1$, $a \notin \mathbb{R}$ und $b \neq 0$: $w = az + b$
Die komplexen Zahlen z werden mit a multipliziert. Die Multiplikation einer komplexen Zahl z mit einer anderen komplexen Zahl $a = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$ bzw. $a = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ bewirkt eine Drehung der komplexen Zahl z um φ und einer Streckung mit Faktor r (Zentrum 0). Die Addition von $b = b_1 + ib_2$ bewirkt anschliessend eine Verschiebung der komplexen Zahl az um $\binom{b_1}{b_2}$.

Spezialfälle für $b = 0$: $w = az$
$a \in \mathbb{R}$: Zentrische Streckung mit Zentrum 0 und Streckfaktor a
$|a| = 1$, $a \notin \mathbb{R}$: Drehung um $\arg(a)$ mit Zentrum 0
$|a| \neq 1$ und $a \notin \mathbb{R}$: Drehstreckung mit Zentrum 0, Streckfaktor $|a|$, Drehwinkel $\arg(a)$

Beispiel

$w = 2iz + 2 + i$
Es ist $2i = 2\,\text{cis}(90°)$ bzw. $2i = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$.
$z = x + iy$ und damit der Ortsvektor $\binom{x}{y}$ wird um 90° gedreht (Drehzentrum 0), um 2 gestreckt und anschliessend um $\binom{2}{1}$ verschoben.

Bilder bei linearen Abbildungen

Wird ein geometrisches Objekt durch eine lineare Abbildung abgebildet, so ist sein Bild **ähnlich** zu seinem Urbild.

Bemerkung: Bei nicht linearen Abbildungen, ist dies im Allgemeinen nicht der Fall (vgl. Aufgabe 5)!

6. Beweise den folgenden Satz.

Eine lineare Abbildung $w = az + b$ stellt für $a \neq 1$ eine Drehstreckung um den Fixpunkt dar.

Speziell ergeben sich für das Abbilden von Geraden und Kreisen mit linearen Abbildungen folgende Rezepte.

Abbilden von Geraden
Zwei Punkte abbilden und daraus die Gleichung der Bildgeraden bestimmen.

Beispiel

Die Gerade $y = x$ soll durch die Abbildung $w = iz + 1$ abgebildet werden.
Lösung: Es werden zwei Punkte der Geraden gewählt, z. B. $(0|0)$ und $(1|1)$.
Der Bildpunkt von $(0|0)$ ist $w(0) = 1$ und somit der Punkt $(1|0)$, der Bildpunkt von $(1|1)$ ist $w(1+i) = i$ und somit der Punkt $(0|1)$. Die Bildgerade ist $v = -u + 1$.

Abbilden von Kreisen
Der Mittelpunkt des Kreises wird auf den Mittelpunkt des Bildkreises abgebildet. Der Radius r des Kreises wird gemäss dem Streckfaktor k, d. h. dem Betrag von a in der Abbildung $w = az + b$, vergrössert bzw. verkleinert. Der Radius des Bildkreises ist also kr.

In den folgenden Aufgaben wird davon ausgegangen, dass es sich um lineare Abbildungen handelt.

7. Gegeben sind eine Abbildung $w = f(z)$ und ein Vieleck. Berechne die Bildpunkte des Vielecks und zeichne sie zusammen mit den Urbildpunkten ein. Deute die Abbildung geometrisch.
   a) $w = f(z) = -\frac{1}{2}\,iz - 7 + 9i$, Viereck $A = 4 + 4i$, $B = 10 + 4i$, $C = 8 + 8i$, $D = 4 + 8i$
   b) $w = f(z) = (-3 + 2i)z + 6 + 2i$, Dreieck $A = -1$, $B = 4$, $C = 2i$

8. Gegeben ist die Abbildung $w = (-1 + i)z + 3 + i$.
   a) Bestimme das Bild der imaginären Achse.
   b) Bestimme das Bild des Kreises $|z| = 2$.
   c) Bestimme das Urbild der reellen Achse.

9. Gegeben ist die Abbildung $w = (2 + i)z - i$.
   a) Bestimme das Bild der reellen Achse.
   b) Bestimme das Bild des Kreises $|z - i + 1| = 4$.
   c) Bestimme das Urbild der imaginären Achse.

10. Gegeben sind die Punkte $A = 3$, $B = 3 + 2i$, $C = -i$ sowie die Bildpunkte $A' = -1 + i$ und $B' = -4 + 2i$. Bestimme den Bildpunkt C' so, dass das Dreieck $A'B'C'$ gleichsinnig ähnlich ist zum Dreieck ABC. Gib die Gleichung der Abbildung an.

11. Das Dreieck ABC mit $A = 4 + 2i$ und $B = 0$ ist gleichseitig und im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Berechne den fehlenden Eckpunkt C.

12. Berechne z so, dass das Dreieck ABC mit $A = 1$, $B = z$, $C = z^2$ rechtwinklig-gleichschenklig ist, mit rechtem Winkel bei A.

13. Eine Drehung mit Drehwinkel $\alpha = -120°$ bildet den Punkt $A = -3 + 3i$ auf $A' = \sqrt{3} + \sqrt{3}\,i$ ab. Bestimme das Drehzentrum.

14. Eine lineare Abbildung besitzt den Fixpunkt $1 + i$ und bildet den Kreis $|z| = 2$ auf einen Kreis mit Mittelpunkt $2i$ ab. Wie heisst die Abbildungsgleichung? Wie gross ist der Radius des Bildkreises?

5.3 Abbilden von Kurven

Normalerweise sind die Bilder bei *nicht linearen Abbildungen* nicht ähnlich zu den Urbildern.

Bei allen Abbildungen (auch bei den linearen) können die Bilder mithilfe von (reellen) Abbildungsgleichungen gefunden werden.

Methode 1: Abbilden von Kurven mithilfe von (reellen) Abbildungsgleichungen
Gesucht ist das Bild der Geraden $y = 1$ unter der Abbildung $w = z^2$.

i) Finden der Abbildungsgleichungen.
$w = u + iv$ und $z = x + iy$ werden in die Abbildungsgleichung $w = z^2$ eingesetzt.
Es entsteht die Gleichung $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$.
Diese Gleichung ist erfüllt, wenn die Realteile auf beiden Seiten der Gleichung gleich sind und ebenso die Imaginärteile.
Dies führt auf die ***reellen** Abbildungsgleichungen* $u = x^2 - y^2$ und $v = 2xy$.

ii) Definition der abzubildenden Kurve in die Abbildungsgleichungen einsetzen.
Einsetzen von $y = 1$ ergibt $u = x^2 - 1$ und $v = 2x$.

iii) Gleichungen so kombinieren, dass eine Gleichung in u und v entsteht.
Es wird $v^2 = 4(u + 1)$, das Bild der Geraden $y = 1$ ist somit eine Parabel.

Eine alternative Methode bietet die Möglichkeit, die Kurve als komplexe Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$, also als Parameterdarstellung zu schreiben (vgl. Kapitel 4).

Methode 2: Abbilden von Kurven in Parameterdarstellung
Gesucht ist wiederum das Bild der Geraden $y = 1$ unter der Abbildung $w = z^2$.

Die Gerade $y = 1$ kann als komplexe Funktion $z(t) = t + i$, $t \in \mathbb{R}$ geschrieben werden.

i) Einsetzen in $w = z^2$.
$w = (t + i)^2 = t^2 - 1 + 2it$

ii) Real- und Imaginärteil von w bilden die zwei Gleichungen
$\mathrm{Re}(w) = u = t^2 - 1$ und $\mathrm{Im}(w) = v = 2t$

iii) Gleichungen so kombinieren, dass eine Gleichung in u und v entsteht.
Es wird $v^2 = 4(u + 1)$, das Bild der Geraden $y = 1$ ist somit eine Parabel.

Sind Kreisgleichungen der Form $z\,\overline{z} - \overline{m}\,z - m\,\overline{z} + c = 0$ und Geradengleichungen der Form $\overline{b}\,z + b\,\overline{z} + c = 0$ bekannt (vgl. Kapitel 4), so gibt es eine weitere Lösungsmöglichkeit.

Methode 3: Abbilden von Kreisen und Geraden in komplexer Form
Gesucht ist das Bild des Kreises mit Mittelpunkt $m = \frac{3}{2}$ und Radius $r = \frac{1}{2}$ unter der Abbildung $w = \frac{1}{z-1}$.

i) Komplexe Gleichung des Kreises finden.
$z\,\overline{z} - \frac{3}{2}z - \frac{3}{2}\,\overline{z} + 2 = 0$

ii) Umkehrfunktion von $w = \frac{1}{z-1}$ finden.
$z = \frac{1}{w} + 1$

iii) $z = \frac{1}{w} + 1$ in die komplexe Kreisgleichung einsetzen und diese vereinfachen.
Einsetzen ergibt $(\frac{1}{w}+1)\,\overline{(\frac{1}{w}+1)} - \frac{3}{2}(\frac{1}{w}+1) - \frac{3}{2}\,\overline{(\frac{1}{w}+1)} + 2 = 0$. Vereinfachen führt auf die Gleichung $w + \overline{w} - 2 = 0$.
Das Bild dieses Kreises ist die Gerade $u = 1$.

Es lohnt sich, den Einsatz der verschiedenen Methoden zu prüfen. Manchmal ist die eine Methode viel einfacher als die andere, wie das folgende Beispiel aufzeigt.

Vergleich verschiedener Methoden

Gesucht ist das Bild des Einheitskreises $|z| = 1$ unter der Abbildung $w = z^2$.

Methode 1: Lösung mithilfe der reellen Abbildungsgleichungen
Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ des Einheitskreises nach y auflösen und in die Abbildungsgleichungen $u = x^2 - y^2$ und $v = 2xy$ einsetzen. Dies ergibt die Gleichungen $u = 2x^2 - 1$ und $v = \pm 2x\sqrt{1 - x^2}$.
Die erste Gleichung nach x auflösen, in die zweite Gleichung einsetzen und diese vereinfachen liefert (nach längerer Rechnung) $u^2 + v^2 = 1$. Das Bild des Einheitskreises ist wiederum der Einheitskreis.

Methode 2: Lösung mithilfe einer Parametrisierung
Die Gleichung $z(t) = \mathrm{e}^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi[$ des Einheitskreises in die Abbildungsgleichung $w = z^2$ einsetzen. Dies ergibt die Gleichung $w = (\mathrm{e}^{it})^2 = \mathrm{e}^{2it}$.
$z(t) = \mathrm{e}^{2it}$ ist wiederum der Einheitskreis. (Für $t \in [0, 2\pi[$ werden alle Punkte zweimal angenommen.)

Die dritte Methode kann in diesem Beispiel nicht angewendet werden, da keine Umkehrfunktion von $w = z^2$ gebildet werden kann.

Oft werden mehrere Abbildungen hintereinander ausgeführt, man spricht von einer *Verkettung* von Abbildungen.

Verkettung (Komposition) von Abbildungen

Unter einer Verkettung von zwei Abbildungen $g \circ f(z) = g(f(z))$ versteht man das hintereinander Ausführen der beiden Abbildungen f und g (in dieser Reihenfolge).

Beispiel

Die lineare Abbildung $w = az + b$ kann als Verkettung der Abbildung $f(z) = az$ und $g(z) = z + b$ dargestellt werden:
$w = g \circ f(z) = g(f(z))$

5.4 Quadratische Abbildungen

Quadratische Funktion (quadratische Abbildung)

Eine quadratische Funktion ist eine Funktion der Art

$$w = az^2 + bz + c$$

Dabei sind a, b und c komplexe Zahlen, $a \neq 0$.

Mit den folgenden beiden Aufgaben kann das Abbilden von Kurven trainiert werden.
(In den Lösungen werden jeweils auch die Abbildungsgleichungen angegeben.)

15. Gegeben ist die Abbildung $w = iz^2$.
    a) Bestimme die Fixpunkte dieser Abbildung.
    b) Bestimme die Bilder der reellen Achse, der imaginären Achse sowie der Geraden $y = x$, $y = 2x$ und $x = 2$.

16. Gegeben ist die Abbildung $w = iz^2 - 3 + i$.
    a) Bestimme die Fixpunkte dieser Abbildung.
    b) Bestimme die Bilder der reellen Achse, der imaginären Achse sowie der Geraden $x = 1$ und $y = 3x$.

17. Gegeben sind die Punkte $A = 1$, $B = i$, $C = 0$ und die Abbildung $w = iz^2 + 1$.
    a) Bestimme das Bild des Dreiecks ABC. Entscheide, ob das Dreiecksinnere auf das Innere der Bildfigur abgebildet wird oder auf das Äussere.
    b) Zeige, dass die Höhe h_c des Dreiecks ABC auf die reelle Achse abgebildet wird.

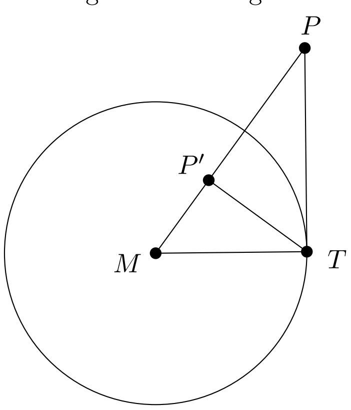
In den nächsten beiden Aufgaben wird die quadratische Abbildung $w = z^2$ etwas genauer untersucht.

18. Gegeben ist die quadratische Abbildung $w = z^2$.
    a) Bestimme die Fixpunkte.
    b) Bestimme das Bild der reellen Achse.
    c) Bestimme das Bild der imaginären Achse.
    d) Bestimme die Bilder der Geraden $y = x$ und $y = -x$.
    e) Bestimme das Bild einer beliebigen Geraden durch 0.
    f) Zeige: Die Bilder von Geraden, welche zu den Koordinatenachsen parallel sind, sind Parabeln.
       Zeige, dass alle diese Parabeln den Brennpunkt 0 besitzen.
    g) Bestimme das Bild des Kreises mit Mittelpunkt 0 und Radius r.
       Welcher geometrischen Abbildung entspricht $w = z^2$ für Punkte des Kreises?

19. Gegeben ist die quadratische Abbildung $w = az^2 + bz + c$, $a \neq 0$.
    a) Bestimme die Anzahl Fixpunkte der Abbildung in Abhängigkeit von a, b und c.
    b) Zeige, dass gilt: $w = az^2 + bz + c = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$
       Mit dieser Umformung kann die allgemeine Abbildung $w = az^2 + bz + c$ für $a \neq 0$ als Verkettung von vier Abbildungen gedeutet werden. Erkläre welche und in welcher Reihenfolge.

5.5 Inversion am Einheitskreis

Das folgende Bild zeigt die Konstruktion der *Inversion am Kreis*:



Liegt der vorgegebene Punkt P ausserhalb des Kreises, so wird von P aus die Tangente an den Kreis gelegt und anschliessend vom Berührungspunkt T der Tangente mit dem Kreis das Lot auf die Gerade PM gelegt. Der Lotfusspunkt P' ist der Bildpunkt von P. Umgekehrt ist P der Bildpunkt von P', falls der vorgegebene Punkt innerhalb des Kreises liegt.

Kreislimit-Bilder von M. C. Escher
Sicher hast du schon einmal von dem berühmten niederländischen Künstler *Maurits Cornelis Escher (1898-1972)* gehört und kennst einige seiner Werke. In seinen Bildern Kreislimit I bis IV verwendet er die Konstruktion *Inversion am Kreis*.

Die Kreise, an denen invertiert wird, sind in Kreislimit III hervorgehoben. Sie schneiden die Peripherie der Kreisscheibe in rechten Winkeln. Die Konstruktion kann gegen den Rand der Kreisscheibe immer weitergeführt werden, so dass die Bilder immer kleiner werden und die Kreisscheibe vollständig ausgefüllt wird. (M.C. Escher's "LW434 Circle Limit III" and "lw436"©2021 The M.C. Escher Company-The Netherlands. All rights reserved. www.mceschek.com)

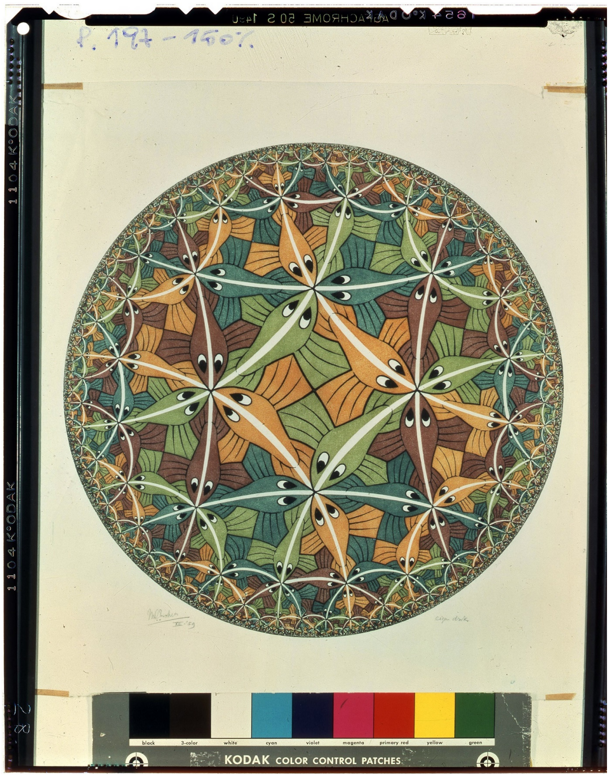


Abbildung 7: Kreislimit III

Abbildung 8: Kreislimit IV

Für die weiteren Betrachtungen in diesem Kapitel ist der Kreis immer der Einheitskreis.

20. **Konstruktion *Inversion am Einheitskreis* und komplexe Abbildung** $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$

a) Zeige, dass diese Konstruktion durch die komplexe Abbildung $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ definiert wird.
Tipp: Polar- bzw. Exponentialform verwenden.

b) Überlege dir geometrisch, welche Punkte Fixpunkte sind und finde diese rechnerisch mithilfe der Abbildungsgleichung $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

Erweiterung der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zu $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Die Abbildung $w = 1/\overline{z}$ ist für $z = 0$ nicht definiert. Der Bildpunkt von $z = 0$ liegt quasi im Unendlichen. Umgekehrt werden *unendlich ferne* Punkte quasi in den Nullpunkt abgebildet. In der *Projektiven Geometrie* wird dieser Sachverhalt präzis definiert: Die uns bekannte Ebene, die *euklidische Ebene*, wird um die *unendlich fernen Punkte* zur *projektiven Ebene* erweitert. Entsprechend wird die komplexe Zahlenmenge $\mathbb{C}$ um das Element ∞ zu $\overline{\mathbb{C}}$ erweitert. Mit dieser Definition wird die Abbildung in beiden Richtungen eindeutig. Es gilt $w(0) = \infty$ und $w(\infty) = 0$.

Die Abbildung $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ ist für alle $z \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert und ist umkehrbar eindeutig.

21. **Geometrische Betrachtungen**
    Überlege dir ohne Rechnung aber mithilfe von Skizzen die Bilder folgender geometrischer Objekte. Gib an, wo du sicher bist und wo du nur eine Vermutung hast.
    a) Gerade durch den Nullpunkt
    b) Kreis mit Mittelpunkt 0
    c) Tangente an den Einheitskreis
    d) Kreis, welcher den Einheitskreis von aussen berührt
    e) Kreis, welcher durch den Nullpunkt geht

22. **Rechnerische Bestimmung von Bildern geometrischer Objekte unter der Abbildung $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$**
    a) Zeige, dass Geraden, welche durch den Nullpunkt gehen, auf sich selbst abgebildet werden, jedoch keine Fixpunktgeraden sind.
    b) Bestimme das Bild des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$.
    c) Bestimme das Bild der Geraden $y = 1$.
    d) Bestimme das Bild des Kreises $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.
    e) Bestimme das Bild des Kreises $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

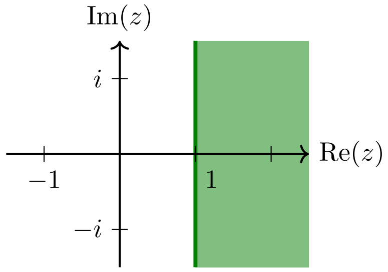
Die Abbildung Inversion

Die Abbildung $w = \dfrac{1}{z}$ heisst **Inversion**.
Sie ist für alle $z \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert und ist umkehrbar eindeutig.

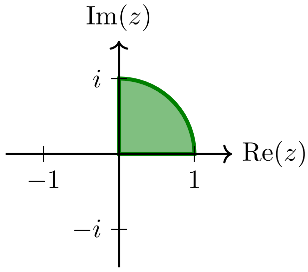
23. Gegeben ist die Abbildung $w = \dfrac{1}{z}$.
    a) Deute diese Abbildung geometrisch. Vergleiche mit $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
    b) Bestimme das Bild der Geraden $y = x$.
    c) Bestimme das Bild des Kreises $\left|z - \frac{1}{2}\, i\right| = \frac{1}{2}$.

24. Gegeben ist die Abbildung $w = \dfrac{1}{z}$. Bestimme und zeichne die Bildmenge des markierten Gebiets.

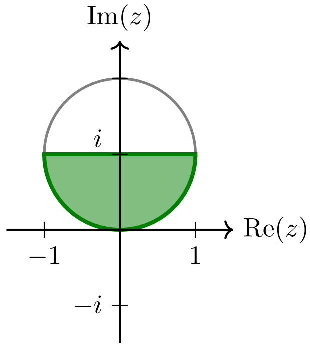
a)



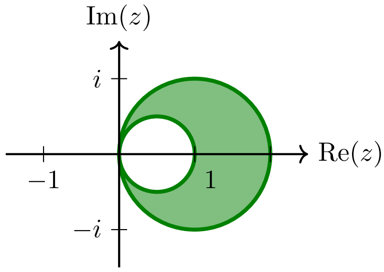
b)



c)



d)



25. **Lemniskate**
In dieser Aufgabe sollen Eigenschaften einer unbekannten Kurve mithilfe der Konstruktion *Inversion am Einheitskreis* gefunden werden.
Vorgegeben ist die *Einheitshyperbel* $x^2 - y^2 = 1$.
   a) Zeichne die Einheitshyperbel samt ihren Asymptoten in einem Koordinatensystem.
   b) Finde nun Punkte der Bildkurve der Einheitshyperbel mithilfe der Konstruktion *Inversion am Einheitskreis*. Beschreibe das Bild. Welche Eigenschaften der Bildkurve findest du?
   c) Zeige, dass $u^2 - v^2 = (u^2 + v^2)^2$ eine reelle Gleichung dieser Kurve ist.

5.6 Möbiustransformation

Möbiustransformation

Eine Funktion der Art $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$ heisst gebrochen lineare Funktion oder Möbiustransformation.
Die Möbiustransformation ist für alle $z \in \overline{\mathbb{C}}$ definiert und umkehrbar eindeutig.
Sie setzt sich aus linearen Funktionen und der Inversion zusammen.

Es gilt: $w = \dfrac{bc - ad}{c} \dfrac{1}{cz+d} + \dfrac{a}{c} = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$w_1 = cz + d$ ist eine lineare Abbildung,
$w_2 = \dfrac{1}{w_1}$ ist die Inversion,
$w_3 = \dfrac{bc-ad}{c} w_2 + \dfrac{a}{c}$ wiederum eine lineare Abbildung.

w ist also die Verkettung $w = w_3 \circ w_2 \circ w_1(z) = w_3(w_2(w_1(z)))$

In der folgenden Aufgabe kann das Bild bei einer Möbiustransformation durch geometrische Überlegungen erhalten werden.

26. Es werden hintereinander drei Abbildungen durchgeführt: $w_1 = iz + i$, $w_2 = \frac{1}{w_1}$, $w_3 = iw_2$
   a) Bestimme das Bild der imaginären Achse, wenn du sie zuerst mit w_1 abbildest, dann ihr Bild mit w_2 und dieses Bild wiederum mit w_3. Gib nach jeder Abbildung die Gleichung des Bildes an. (Eine Rechnung ist nicht nötig.)
   b) Gib eine Gleichung an, welche direkt aus z den Bildpunkt w_3 berechnet.

In den nächsten Aufgaben sollen die Bilder rechnerisch gefunden werden.

27. Betrachte die Funktion $f(z) = \frac{2}{4-z}$ und die Menge $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 3\}$.
   a) Welches sind die Gleichungen der Bilder der Begrenzungsgeraden von S?
   b) Zeichne die Urbild- und die Bildmenge in die gleiche Zahlenebene (1 Einheit = 4 Häuschen) ein.

28. Gegeben sind die Funktion $w = \frac{z-i}{z+i}$ und die Kurven $k:\ |z| = 1$ und $g:\ \mathrm{Im}(z) = 0$.
   a) Welches sind die Gleichungen der Bilder dieser Kurven?
   b) Zeichne die gegebenen Kurven in eine Zahlenebene (1 Einheit = 4 Häuschen) und färbe die Gebiete, in welche diese Kurven die z-Ebene zerlegen, mit verschiedenen Farben. Zeichne die Bilder der Kurven in eine zweite Zahlenebene ein und färbe jedes Bildgebiet mit derselben Farbe wie das entsprechende Originalgebiet.

29. Gegeben sind die Funktion $f(z) = \frac{z}{z-1}$ und die Kurven $g_1:\ \mathrm{Im}(z) = 1$, $g_2:\ \mathrm{Im}(z) = -1$ und $g_3:\ \mathrm{Re}(z) = 0$.
    a) Welches sind die Gleichungen der Bilder dieser Kurven?
    b) Zeichne die gegebenen Kurven in eine Zahlenebene (1 Einheit = 4 Häuschen) und färbe die Gebiete, in welche diese Kurven die z-Ebene zerlegen, mit verschiedenen Farben. Zeichne die Bilder der Kurven in eine zweite Zahlenebene ein und färbe jedes Bildgebiet mit derselben Farbe wie das entsprechende Originalgebiet.

5.7 Vermischte Aufgaben zur Repetition

30. Gib die Gleichung $w = az + b$ der Drehstreckung mit Zentrum z_0, Drehwinkel α und Streckfaktor k an.
    a) $z_0 = 0$, $\alpha = 90°$, $k = 3$
    b) $z_0 = 3$, $0° < \alpha < 90°$ mit $\sin(\alpha) = 0.8$, $k = 5$
    c) $z_0 = \sqrt{2}\,i$, $\alpha = 135°$, $k = 2$

31. Gegeben sind die Abbildung $w = (2 - i)z$, die Gerade $y = -x + 1$ und der Kreis mit Mittelpunkt $M(0, 2)$ und Radius 1.
    Bestimme die Gleichungen der Bilder der Geraden und des Kreises.

32. Gegeben ist die Abbildung $w = iz - 2i$.
    a) Bestimme das Bild der Geraden $y = x$.
    b) Bestimme das Bild des Kreises $|z + 2 - i| = 1$.

33. Die Drehstreckung d hat das Zentrum 0 und bildet $A = 3 + 5i$ auf $A' = -4 - i$ ab. Die Rotation r hat den Drehwinkel 90°. Die Verkettung $r \circ d$ besitzt den Fixpunkt $p = 2 + i$. Wo liegt das Zentrum der Rotation r?

34. Das Dreieck ABC mit $A = 2 + i$ und $B = 4 + 5i$ ist gleichseitig und im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Berechne den fehlenden Eckpunkt C.

35. Eine Drehung mit Drehwinkel $\alpha = 27°$ bildet den Punkt $A = 0$ auf $A' = 5 + 2i$ ab. Bestimme das Drehzentrum.

36. Gegeben ist die Funktion $w = (1 - i)\,z^2 + 1$.
    a) Bestimme die Fixpunkte dieser Abbildung.
    b) Bestimme die Bilder der reellen Achse, der imaginären Achse sowie der Geraden $y = x$.

37. Betrachte die Abbildungen $d(z) = 2iz$, $r(z) = \frac{1}{z}$, $t(z) = z + 2$.
    Stelle die Verkettung in der Form $w = \frac{az+b}{cz+d}$ dar und gib an, ob das Bild der Kurve $k_1:\ \mathrm{Re}(z) = 0$ und der Kurve $k_2:\ |z - 2i| = 1$ eine Gerade oder ein Kreis ist.
    a) $d(r(z))$
    b) $r(t(d(z)))$

38. Betrachte die Abbildung $w = \frac{1+i}{iz}$.
    a) Berechne die Fixpunkte.
    b) Bestimme das Bild der imaginären Achse.
    c) Bestimme das Bild der Geraden $x = 1$.

39. Betrachte den Kreissektor, welcher im 1. Quadranten durch den Einheitskreis $|z| = 1$, die imaginäre Achse und die Gerade $y = 2x$ begrenzt wird. Die Abbildung $w = \frac{1}{z-1}$ bildet diesen Kreissektor ab.
    Zeichne das Bild des Kreissektors und gib Gleichungen der Randkurven an.

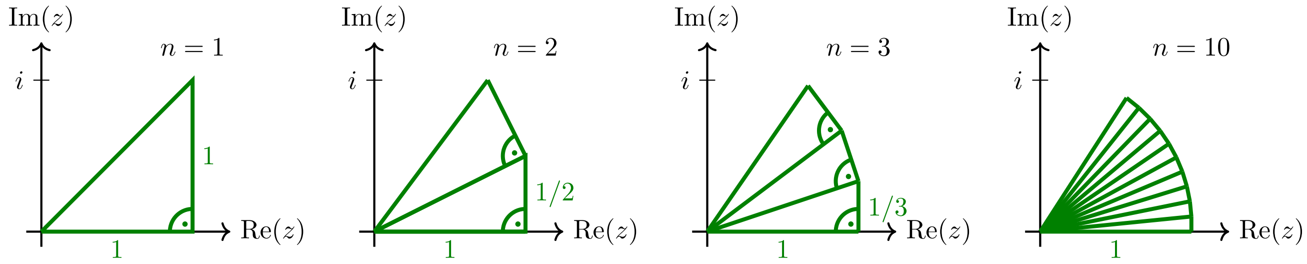
6 Anhänge

6.1 $e^{i\varphi}$ oder Das Entsetzen eines Physikers

von Peter Gallin, Kantonsschule Zürcher Oberland, 8620 Wetzikon (Bulletin Nr. 90 vom Oktober 2002, leicht gekürzt)

Die Hemmung $e^{i\varphi}$ anstelle von $\operatorname{cis}(\varphi)$ zu verwenden stammt vermutlich aus der Sorge, einen strengen Beweis für die Gleichung $e^{i\varphi} = \operatorname{cis}(\varphi)$ kaum erbringen zu können, ohne nicht auch noch die Infinitesimalrechnung mit ihren Reihenentwicklungen mobilisieren zu müssen. Es ist sicher wahr, dass für viele Schülerinnen und Schüler der Beweis dieser Gleichung über unendliche Reihen mit komplexen Summanden sehr fern vorkommt und wenig einleuchtet. Darum möchte ich hier einen Weg zu dieser Gleichung vorschlagen, der wenigstens intuitiv einleuchtet, auch wenn er nicht zu einem strengen Beweis ausgebaut wird.

Man startet mit der Feststellung, dass alle Grundrechenoperationen im Körper der reellen Zahlen uneingeschränkt auch im Komplexen gelten (Permanenzprinzip). Ferner erinnert man an die Festlegung der reellen Zahl e als $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Dieser Grenzwert wird zuerst für positive, dann auch für negative Zahlen a verallgemeinert auf $e^a = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$. Das ist eine *Exponentiermaschine*, weil sie es schafft, die Zahl a von der Hauptschreiblinie in die Exponentenschreiblinie zu hieven. Mit ihrer Hilfe gelingt es, auch eine komplexe Zahl auf die Exponentenschreiblinie zu bringen. Deshalb ist die Definition $e^i = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ durchaus einleuchtend, nachdem ja das Permanenzprinzip gilt. Jetzt stellt sich die Frage, welche komplexe Zahl denn e^i ist. Dazu muss man die Folge $(1+i)^1$, $\left(1+\frac{i}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{i}{3}\right)^3$, ... betrachten, und man tut dies am besten rein geometrisch in der Gauss'schen Zahlenebene.



Wie man aus der Figur erkennt, werden mit wachsendem n immer mehr rechtwinklige, zueinander ähnliche Dreiecke in der Weise aufeinander geschichtet, dass die Hypotenuse eines unteren Dreiecks zur langen Kathete des oberen wird. Es leuchtet ein, dass für grosse n die Hypotenusen zwar immer leicht grösser als 1 sind, sich aber beliebig nahe an 1 heranbringen lassen. Die Summe aller kleinen Katheten ist (ausser für $n = 1$) ebenfalls grösser als 1, nähert sich aber auch von oben dem Grenzwert 1, weil die Länge der kleinen Kathete des untersten Dreiecks immer $\frac{1}{n}$ beträgt und man n Dreiecke aufeinander schichtet, die sich nur ganz leicht vergrössern. Daraus ergibt sich, dass der Punkt $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ sich bei wachsendem n von aussen dem Einheitskreis nähert und zwar zu jener Stelle, die das Bogenmass 1 als Argument hat. Also gilt $e^i = \cos(1) + i\sin(1)$. Da man schon weiss, was das Potenzieren einer komplexen Zahl mit einem rellen Exponenten ϕ bedeutet (nämlich: potenziere den Betrag mit ϕ und multipliziere das Argument mit ϕ), ergibt sich $\left(e^i\right)^\varphi = 1^\varphi \cdot (\cos(1\cdot\varphi) + i\sin(1\cdot\varphi))$. Damit ist die Gleichung $e^{i\varphi} = \operatorname{cis}(\varphi)$ plausibel gemacht, womit die Abkürzung $\operatorname{cis}(\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ definitiv zu Grabe getragen werden kann. Mein verehrter Mathematikprofessor Peter Henrici an der ETH meinte damals in der zugehörigen Grabrede lakonisch: *Als Abkürzung hat $e^{i\varphi}$ erst noch den Vorteil, einen Buchstaben weniger als $\operatorname{cis}(\varphi)$ zu haben.*

6.2 Die *Komplexen Zahlen* bilden einen *Körper*

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit mathematischen Strukturen, konkret mit **Gruppen** und **Körpern**.

Gruppe

Gegeben ist eine Menge M mit den Elementen $a, b, c, \ldots$.
o bezeichnet eine Verknüpfung zwischen den Elementen der Menge M.
Die Menge M bildet bzgl. der Verknüpfung o eine **Gruppe**, wenn gilt:

1. $a\,o\,b$ ist wieder ein Element von M.
2. Es gilt das *Assoziativ-Gesetz* $a\,o\,(b\,o\,c) = (a\,o\,b)\,o\,c$.
3. Es gibt eine *neutrales Element* E, so dass gilt: $a\,o\,E = a$.
4. Es gibt zu jedem Element a der Menge M ein *inverses Element* a^{-1}, so dass gilt: $a\,o\,a^{-1} = E$.
5. Gilt zusätzlich das *Kommutativ-Gesetz* $a\,o\,b = b\,o\,a$, so wird die Gruppe *Kommutative Gruppe* oder *Abelsche Gruppe* genannt.

1. Bilden die reellen Zahlen bzgl. der Addition eine (kommutative) Gruppe?
2. Bilden die komplexen Zahlen bzgl. der Addition eine (kommutative) Gruppe?
3. Zeige: Die komplexen Zahlen bilden bzgl. der Multiplikation für $a \neq 0$ eine (kommutative) Gruppe?
   Weshalb muss die Forderung $a \neq 0$ gemacht werden?
4. Bilden die Vektoren bzgl. der Vektoraddition eine Gruppe?
5. Bilden die Vektoren bzgl. des Skalarprodukts eine Gruppe?
6. Bilden die Vektoren bzgl. des Vektorprodukts eine Gruppe?

Körper

Die komplexen Zahlen bilden also bzgl. der Addition $+$ und der Multiplikation $*$ für $a \neq 0$ eine kommutative Gruppe.
Eine Verbindung dieser beiden Operationen bildet das **Distributiv-Gesetz** $a * (b + c) = a * b + a * c$.
Wir sagen: Die komplexen Zahlen bilden einen **Körper**.

7. Zeige, dass für die komplexen Zahlen das **Distributiv-Gesetz** gilt.

6.3 Komplexe Zahlen und Matrizen

Wenn du *Lineare Abbildungen* und *Matrizen* kennst, erfährst du in diesem Abschnitt den Zusammenhang mit den komplexen Zahlen.
Stellen wir uns die komplexe Zahl z als einen Ortsvektor vor, so wird dieser Vektor bei der Multiplikation mit der komplexen Zahl $z = r\,cis(\varphi) = r\,e^{i\,\varphi}$ um den Faktor r gestreckt und um den Winkel φ gedreht (Drehzentrum 0). Die Matrix $S = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ stellt eine Streckung um r dar, die Matrix $D = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$ eine Drehung um φ.

8. Zeige, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} r\,cos(\varphi) & -r\,sin(\varphi) \\ r\,sin(\varphi) & r\,cos(\varphi) \end{pmatrix}$ eine Drehstreckung darstellt.

Vergleichen wir die Matrix A mit der Polarform der komplexen Zahl $z = a + i\,b = r\,\text{cis}(\varphi) = r\,cos(\varphi) + i\,r\,sin(\varphi)$, so sehen wir, dass die Matrix $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ die komplexe Zahl $z = a + i\,b$ darstellt.

9. Finde zu folgenden komplexen Zahlen die zugehörigen Matrizen:

   a) i b) $1 + i$ c) $-1 + i$ d) $\sqrt{3} - i$

10. Berechne mit den gefundenen Matrizen:

    a) i^2 b) $(1 + i)(1 - i)$ c) $(1 + i) + (1 - i)$ d) $2(1 + i)$

11. Finde zu folgenden Matrizen die zugehörigen komplexen Zahlen:

    a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 2 \\ -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. Welche Bedeutung hat die *Determinante* der Matrix $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$?

13. Beweise: Für Matrizen der Art $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ gilt das Kommutativ-Gesetz der Multiplikation.

14. Beweise: Die zu $A = \begin{pmatrix} r\,cos(\varphi) & -r\,sin(\varphi) \\ r\,sin(\varphi) & r\,cos(\varphi) \end{pmatrix}$ inverse Matrix A^{-1} ist $A^{-1} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} r\,cos(\varphi) & r\,sin(\varphi) \\ -r\,sin(\varphi) & r\,cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

15. Berechne folgende Divisionen, indem du zuerst die zu den komplexen Zahlen gehörenden Matrizen bildest, dann die oben bewiesene Formel verwendest, um die Division auszuführen und schliesslich aus der Matrix wieder die entsprechende komplexe Zahl angibst.

    a) $\frac{1}{i}$ b) $\frac{1-i}{1+i}$ c) $\frac{4}{-2+2i}$

Ergebnisse

1. Kapitel

1. a) $x = \pm 3i$ b) $x = \pm\sqrt{15}\, i$ c) $x = -1 \pm i$

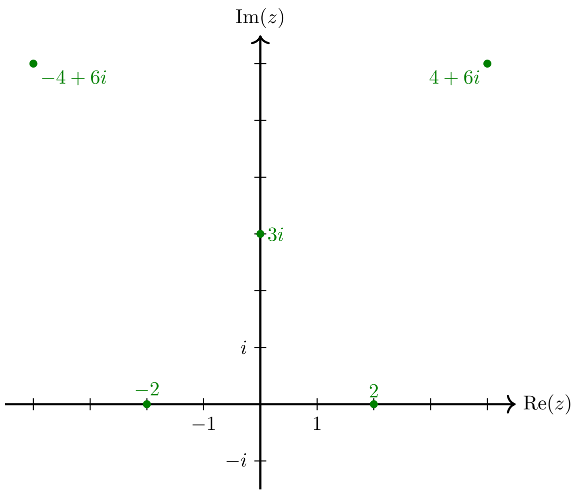
2. a) 2 b) i c) -1 d) $-1 - 6i$

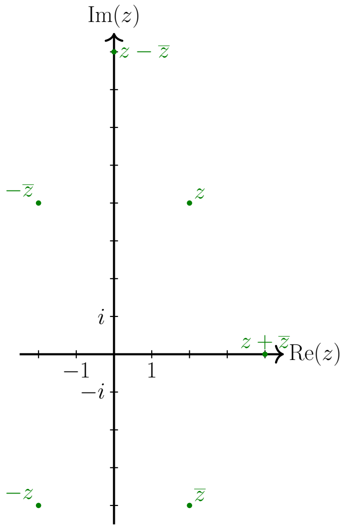
3. $i^n = \begin{cases} i, & \text{falls } n \mod 4 = 1 \\ -1, & \text{falls } n \mod 4 = 2 \\ -i, & \text{falls } n \mod 4 = 3 \\ 1, & \text{falls } n \mod 4 = 0 \end{cases}$

4. Wird i als $\sqrt{-1}$ definiert, so führt das mit den gängigen Rechenregeln offensichtlich auf einen Widerspruch.

5. i ist sicher nicht 0, da sonst $i^2 = 0$ wäre, es ist aber $i^2 = -1$.
   Wir nehmen an, i sei positiv, dann gilt $i > 0$. Multiplikation mit i ergibt $i^2 > 0$, also $-1 > 0$, was offensichtlich falsch ist.
   Auch $i < 0$ führt auf einen Widerspruch. Da sich bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen umkehrt, wird $i^2 > 0$ bzw. $-1 > 0$. i ist somit weder positiv noch negativ. Die Frage nach positiv oder negativ gibt nur im Reellen, nicht aber im Komplexen einen Sinn.

6. a) $(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$
   b) $x + iy + x - iy = 2x$
   c) $x + iy - (x - iy) = 2iy$
   d) $x + iy = x - iy \Leftrightarrow 2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0$
   e) $x - iy + a - ib = (x + a) - i(y + b)$
   f) $(x - iy) - (a - ib) = x - a - i(y - b)$

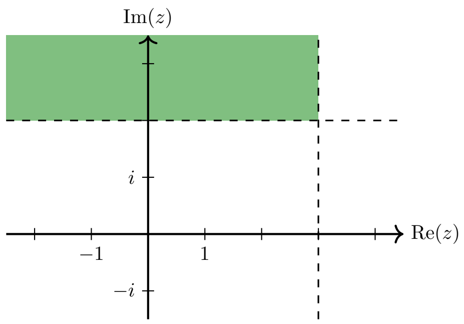
7. 

8. a) 

   b) Achsensymmetrisch bezüglich der reellen Achse

   c) Punktsymmetrisch zum Ursprung

   d) $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$ liegt auf der reellen Achse
   $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ liegt auf der imaginären Achse

9. a) Reelle Achse
   b) Parallele zur imaginären Achse durch $x = 1$
   c) Untere Halbebene
   d) 

10. a) $7 + 10i$ b) 6 c) $5 + 3i$ d) $15 - 10i$ e) i

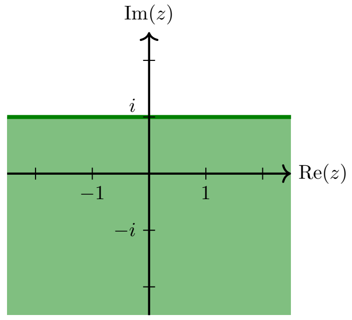
11. a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{34}$ c) 7

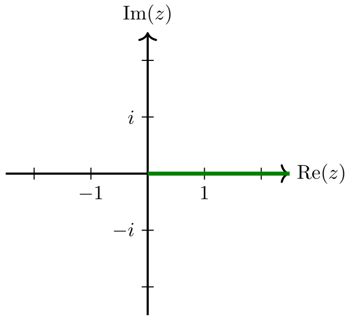
12. a) Kreis: Mittelpunkt $M = 0$ und Radius $R = 1$
    b) Kreis: Mittelpunkt $M = 1 + i$ und Radius $R = 2$
    c) Kreis: Mittelpunkt $M = 4 - 3i$ und Radius $R = 5$

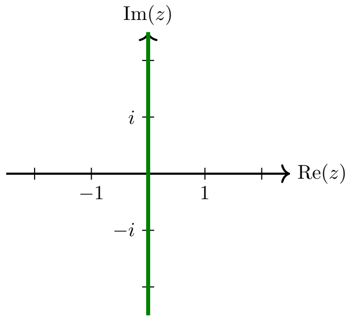
13. $v - w$ entspricht einem Vektor von w nach v. Der Betrag ist gleich der Länge des Vektors, was dem Abstand der beiden Punkte entspricht.

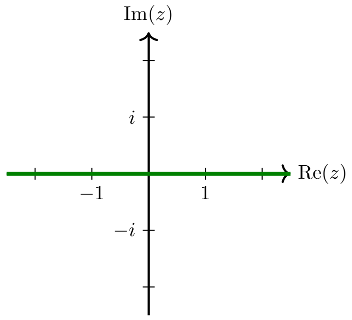
14. Alle Punkte z die von m den Abstand r besitzen bilden einen Kreis um m mit Radius r.

15. a) Verschiebung um den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
    b) Spieglung an der imaginären Achse
    c) Spieglung an der 1. Winkelhalbierenden $x = y$

16. a)


b)


c)


d)


17. a) Ellipse mit Mittelpunkt 0 und grosser Halbachse $a = 4$, kleiner Halbachse $b = 2\sqrt{3}$
    b) Parabel mit Scheitelpunkt 0 und Brennpunkt i
    c) Linker Ast der Hyperbel mit $a = \frac{1}{2}$ und $c = 1$

18. a) $42 - 2i$ b) -1 c) 68 d) -40 e) $-10 - 198i$ f) $x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$

19. a) $(a + ib)(a - ib)$ b) $(3x + 2iy)(3x - 2iy)$ c) $(5a^2 + 3ib^2)(5a^2 - 3ib^2)$
    d) $(\sqrt{a} + i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b})$ e) $(\sqrt{2c} + i\sqrt{3d})(\sqrt{2c} - i\sqrt{3d})$

20. a) Reelle Achse b) ± 1 c) $z = x \pm \sqrt{3}\,x$ und $x \leq 0$

21. a) $\frac{11}{10} - \frac{7}{10}\,i$ b) $3 + 4i$ c) $9 + 4i$ d) $\frac{(ax+by)+(bx-ay)i}{x^2+y^2}$

22. a) $a^2 - b^2 + 2iab$ b) $a^2 - b^2 - 2iab$ c) $a^3 - 3ab^2 + i\left(3a^2b - b^3\right)$
    d) $a^3 - 3ab^2 + i\left(b^3 - 3a^2b\right)$ e) $-i\frac{4uv}{u^2+v^2}$ f) $i\left(6a^2b - 2b^3\right)$
    g) $c^4 - 6c^2d^2 + d^4 + i\left(4c^3d - 4cd^3\right)$ h) $a^2 - 2b^2 + i(2a^2 + b^2)$

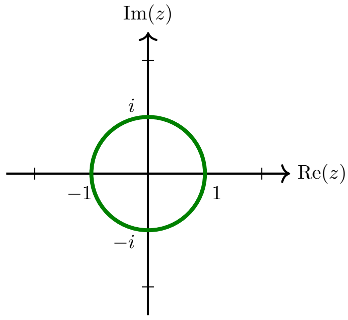
23. a) $\overline{z} \cdot \overline{w} = (x - iy)(a - ib) = xa - yb - i(ya + xb)$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{(x + iy)(a + ib)} = \overline{xa - yb + i(ya + xb)} = xa - yb - i(ya + xb)$
    b) $\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{x - iy}{a - ib} = \frac{1}{a^2 + b^2}(xa+yb+i(-ya+xb))$ und $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{x + iy}{a + ib}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a^2 + b^2}(xa + yb - i(-ya + xb))\right)} = \frac{1}{a^2 + b^2}(xa + yb + i(-yaxb))$

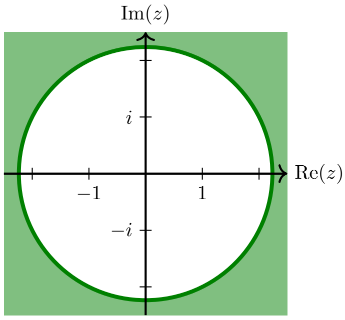
24. a) $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$ b) i

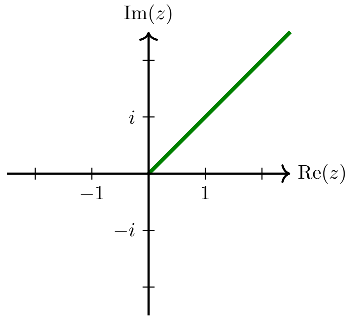
25. a) $2\operatorname{cis}(0°)$ b) $\sqrt{2}\operatorname{cis}(45°)$ c) $2\sqrt{2}\operatorname{cis}(315°)$ d) $\sqrt{2}\operatorname{cis}(135°)$
    e) $4\sqrt{2}\operatorname{cis}(225°)$ f) $\operatorname{cis}(120°)$ g) $\operatorname{cis}(330°)$ h) $4\operatorname{cis}(180°)$

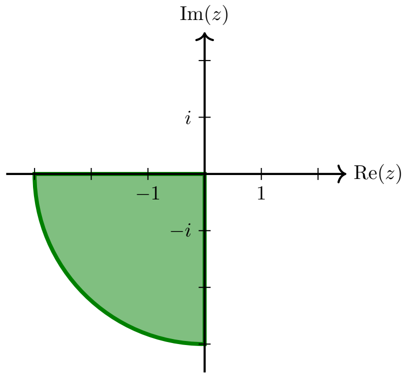
26. a) $45\operatorname{cis}(0°)$ b) $98\operatorname{cis}(180°)$ c) $77\operatorname{cis}(90°)$ d) $\operatorname{cis}(270°)$
    e) $3\sqrt{2}\operatorname{cis}(225°)$ f) $4\operatorname{cis}(60°)$ g) $6\operatorname{cis}(120°)$ h) $\sqrt{34}\operatorname{cis}(\arctan(-\frac{3}{5})+180°) \approx \sqrt{34}\operatorname{cis}(149.04°)$

27. a) 2 b) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ c) $-\sqrt{2}\,i$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\,i$

28. a)


b)


c)


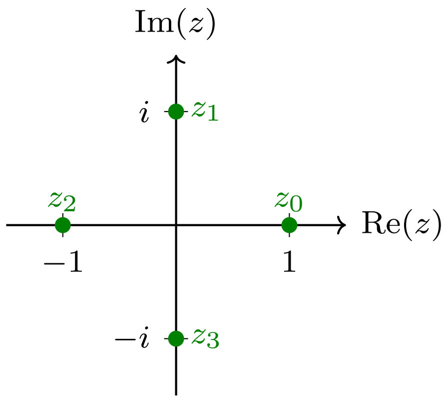
d)


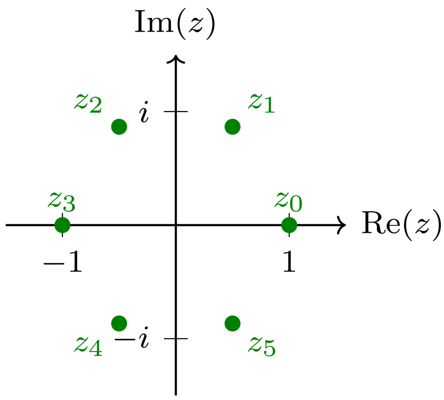
29. a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 5\}$

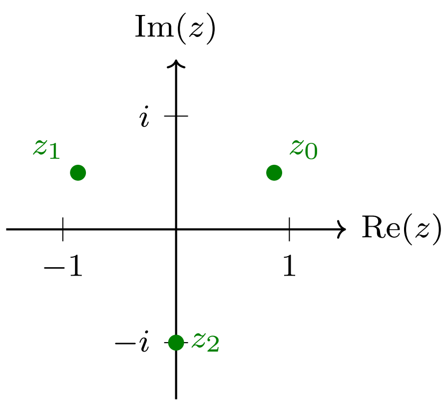
b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \text{ und } 30° \leq \arg(z) \leq 60°\}$

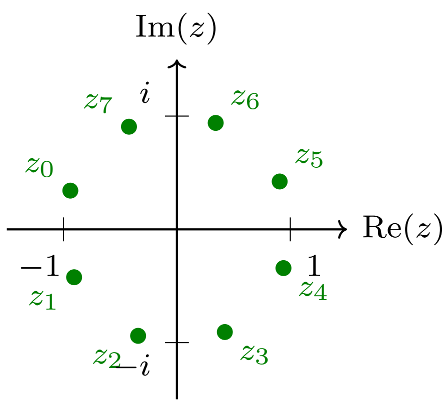
c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) = 45° \text{ oder} \arg(z) = 225°\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2\sqrt{3} \leq |z| \leq 6\sqrt{3} \text{ und } \arg(z) = 120°\}$

30. a)


b)


c)


d)


31. Die Multiplikation mit einem Vektor entspricht einer Drehstreckung. Die Winkel zwischen den Ortsvektoren und der reellen Achse werden addiert. Die Länge des neuen Vektors entspricht dem Produkt der Längen der beiden Vektoren.
Division: Die Winkel zwischen den Ortsvektoren und der reellen Achse werden subtrahiert. Die Länge des neuen Vektors entspricht dem Quotienten der Längen der beiden Vektoren.

Lösung für die Multiplikation
Längen werden multipliziert
Beweis: $z = x + iy$ und $w = a + ib$.
Dann ist $|z| \cdot |w| = \sqrt{(x^2 + y^2) \cdot (a^2 + b^2)} = \sqrt{a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2}$

Das Produkt $z \cdot w = ax - by + i(ay + bx)$ und

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= \sqrt{(ax - by)^2 + (ay + bx)^2} = \sqrt{a^2x^2 - 2axby + b^2y^2 + a^2y^2 + 2aybx + b^2x^2} \\ &= \sqrt{a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2} \end{aligned}$$

Somit gilt $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Winkel zwischen den Ortsvektoren und der reellen Achse werden addiert
Beweis: Additionstheorem:
$\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$, $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$ und $\tan(\gamma) = \frac{ay+bx}{ax-by}$, wobei $a \neq 0$ und $x \neq 0$ gelten soll.

$$\tan(\alpha + \beta) \underbrace{=}_{FS} \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\frac{y}{x} + \frac{b}{a}}{1 - \frac{y}{x}\frac{b}{a}} = \frac{\frac{ay+bx}{ax}}{\frac{ax-by}{ax}}$$

32. a) $6\,\mathrm{cis}(70°)$ b) $39\,\mathrm{cis}(395°) = 39\,\mathrm{cis}(35°)$ c) $19\,\mathrm{cis}(405°) = 19\,\mathrm{cis}(45°)$

33. a) $\mathrm{cis}(120°)$, $\mathrm{cis}(180°)$, $\mathrm{cis}(240°)$, $\mathrm{cis}(300°)$, $\mathrm{cis}(0°)$, $z^7 = z$, $z^8 = z^2$, $z^9 = z^3$, $z^{10} = z^4$
b) $9\,\mathrm{cis}(270°)$, $27\,\mathrm{cis}(225°)$, $81\,\mathrm{cis}(180°)$, $243\,\mathrm{cis}(135°)$, $729\,\mathrm{cis}(90°)$, $2187\,\mathrm{cis}(45°)$, $6561\,\mathrm{cis}(0°)$, $z^9 = 6561z$, $z^{10} = 6561z^2$

34. a) $3\,\mathrm{cis}(90°)$ b) $9\,\mathrm{cis}(135°)$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cis}(-210°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cis}(150°)$

35. a) $w = \mathrm{cis}(-60°) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ b) $w = \frac{4\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(45°)}{2\,\mathrm{cis}(135°)} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(-90) = -2\sqrt{2}i$

36. a) $wz = 6\,\mathrm{cis}(15°)$ und $\frac{z}{w} = \frac{3}{2}\,\mathrm{cis}(15°)$.
Multiplikation mit 2 bedeutet Streckung mit dem Faktor 2, Division Stauchung auf die Hälfte. Der Winkel ändert sich nicht.
b) $wz = \frac{3}{2}\,\mathrm{cis}(15°)$ und $\frac{z}{w} = 6\,\mathrm{cis}(15°)$.
Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ bedeutet Stauchung auf die Hälfte, Division Streckung mit dem Faktor 2. Der Winkel ändert sich nicht.
c) $wz = 3\,\mathrm{cis}(60°)$ und $\frac{z}{w} = 3\,\mathrm{cis}(330°)$.
Multiplikation mit $\mathrm{cis}(45°)$ bedeutet eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um 45°, Division ist eine Drehung im Uhrzeigersinn.
d) Es ist $w = 2i = 2\,\mathrm{cis}(90°)$. Somit $wz = 6\,\mathrm{cis}(105°)$ und $\frac{z}{w} = \frac{3}{2}\,\mathrm{cis}(285°)$.
Multiplikation mit $2i$ bedeutet Streckung mit dem Faktor 2 und Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn. Division bedeutet Stauchung und Drehung im Uhrzeigersinn.

37. a) $\overline{z} = 4\,\mathrm{cis}(300°)$, $-z = 4\,\mathrm{cis}(240°)$ b) $\overline{z} = \frac{1}{3}\,\mathrm{cis}(315°)$, $-z = \frac{1}{3}\,\mathrm{cis}(225°)$

38. a) $45°$ b) $\sqrt{17}$ c) $\approx 153.43°$ d) $\approx 243.43°$
e) $\frac{3}{5}$ f) $\approx 341.57°$

39. a) $8i = 8\,\mathrm{cis}(90°)$ b) $1 = \mathrm{cis}(0°)$ c) $2-2i = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(-45°)$ d) $-i = \mathrm{cis}(270°)$

40. Einsetzen: $$\mathrm{e}^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots = 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \ldots$$

Die rot markierten Summanden gehören zur Reihenentwicklung von $\cos(\varphi)$, die andern zur mit i multiplizierten Reihenentwicklung von $\sin(\varphi)$.

41. a) $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z = 100\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{9}}$ c) $z = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$

42. Die Gleichung $\mathrm{e}^{i\pi}+1 = 0$ enthält eine Addition und mit der 0 ihr neutrales Element, eine Multiplikation mit 1 als neutrales Element sowie die Potenzierung. Ausserdem die Kreiszahl π, die Basis des natürlichen Wachstums e und die imaginäre Einheit i.

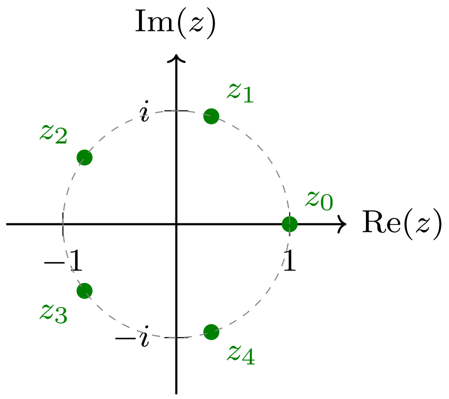
43. $z = \ln(1+i) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^z = 1+i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{2})} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\,\frac{\pi}{4}$

44. a) $z = \mathrm{e}^{-\pi + i\,\ln(16)}$ b) $z = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \mathrm{e}^{i\,(\frac{3\pi}{4} - \ln(2\sqrt{2}))}$ c) $z = \mathrm{e}^{-\pi+2i\ln(2)}$ d) $z = \mathrm{e}^{i\,\frac{\ln(2)}{2}}$

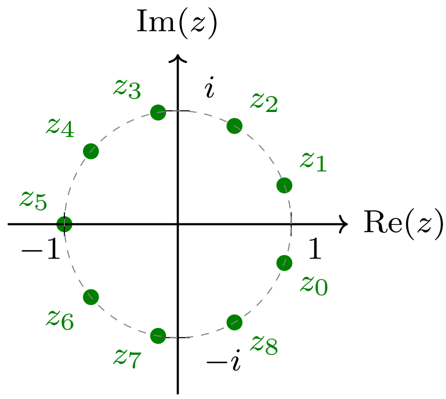
45. a) $z = 3i$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ c) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{3}{10}\,i$
d) $z = i\pi$ e) $z = \ln(2) + i\frac{\pi}{2}$

46. a) $12\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$ b) $4\,\mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}}$ c) $25\,\mathrm{e}^{i\pi}$
d) $4\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ e) $\approx 6.77\,\mathrm{e}^{0.57i\pi}$

47. a)



b)



48. Es ist $\mathrm{e}^{i\,x} = \cos(x) + i\sin(x)$ und $\mathrm{e}^{-i\,x} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x)$, da $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$ ist.
Addierst du beide Gleichungen, so erhältst du $2\cos(x) = \mathrm{e}^{i\,x} + \mathrm{e}^{-i\,x}$ und damit die Beziehung für $\cos(x)$, Subtraktion der beiden Gleichung liefert die Beziehung für $\sin(x)$.

49. Es ist

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) &= \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\,x} - \mathrm{e}^{-i\,x}) \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\,y} + \mathrm{e}^{-i\,y}) + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\,x} + \mathrm{e}^{-i\,x}) \cdot \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\,y} - \mathrm{e}^{-i\,y}) \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\,x+i\,y} - \mathrm{e}^{-i\,x-i\,y}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\,x+i\,y} - \mathrm{e}^{-i\,x-i\,y}) \\
&= \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{i\,(x+y)} - \mathrm{e}^{-i\,(x+y)}) \\
&= \sin(x+y)
\end{aligned}$$

Die andern Additionstheoreme folgen durch analoge Rechnungen.

50. a) $8\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(45°) = 8\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ b) $2\,\mathrm{cis}\,(150°) = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$
c) $2\sqrt{3}\,\mathrm{cis}\,(240°) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$ d) $2\sqrt{3}\,\mathrm{cis}\,(330°) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$

51. a) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ d) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

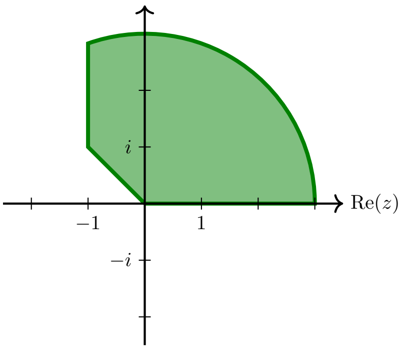
52. a) $-2+2i$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i$

53. a) $14\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ b) $2\,\mathrm{e}^{-i\frac{14\pi}{15}}$ c) $128\,\mathrm{e}^{i0}$ d) $81\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{9}}$

54. $(2a - i\sqrt{b})(2a + i\sqrt{b})$

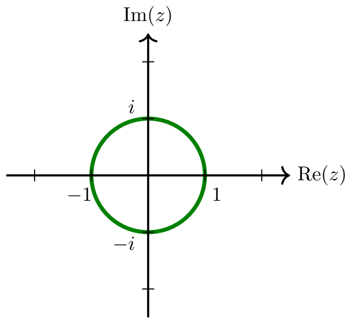
55. a) $-2 + \frac{3}{2}\,i$ b) $3a^2b - b^3$

56.

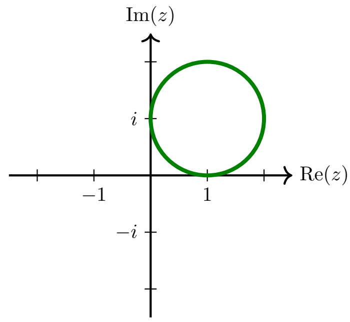


57. $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 90° \le \arg(z) \le 150° \text{ und } |z| \le 2 \text{ und } \operatorname{Im}(z) \ge 1\right\}$

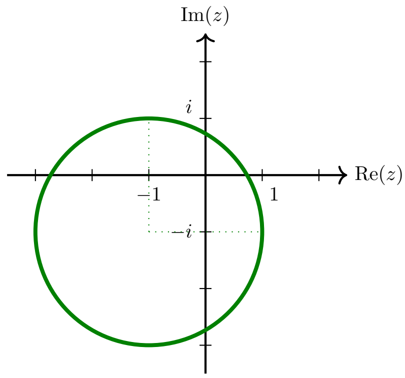
58. a)



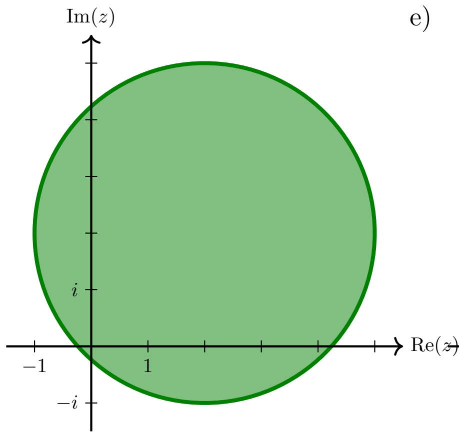
b)



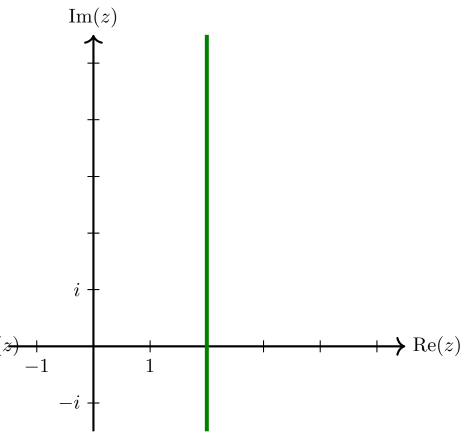
c)



d)



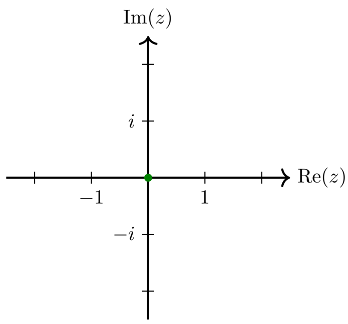
e)



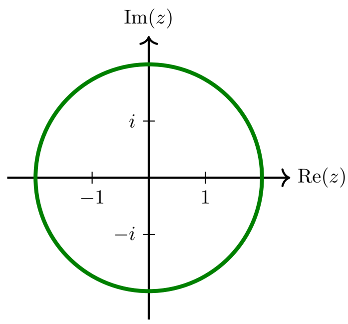
59. Stelle P als komplexe Zahl dar. Verwende die geometrische Eigenschaft der Multiplikation von komplexen Zahlen.

$$\begin{aligned} P = -3 + \sqrt{27}i &= 6\operatorname{cis}(120^\circ) \\ Z &= 2\operatorname{cis}(60^\circ) \\ P \cdot Z = 6\operatorname{cis}(120^\circ) \cdot 2\operatorname{cis}(60^\circ) &= 12\operatorname{cis}(180^\circ) = -12 \\ \Rightarrow \quad & P'(-12|0) \end{aligned}$$

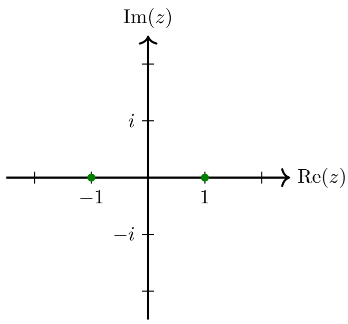
60. a)



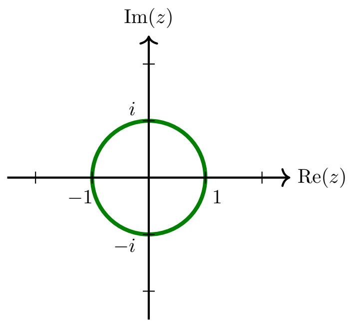
b)



c)



d)



61. a) Parabel mit Scheitelpunkt -0.5 und Brennpunkt 0

b) Hochgestellte Ellipse mit Mittelpunkt 0, grosser Halbachse $a = \frac{3}{2}$ und kleiner Halbachse $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$, sowie Symmetrieachsen parallel zu den Koordinatenachsen

c) Hochgestellte Hyperbel mit $a = 1$, $b = 1$ und $c = \sqrt{2}$ (Einheitshyperbel, sowie Symmetrieachsen parallel zu den Koordinatenachsen)

2. Kapitel

1. a) $5+7i$ b) $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\,i$ c) $-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\,i$ d) $\frac{3}{5}-\frac{24}{5}\,i$ e) $-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\,i$ f) $-\frac{3}{10}-\frac{31}{10}\,i$ g) $1-\frac{13}{2}\,i$ h) $-\frac{13}{5}-\frac{31}{5}\,i$

2. a) $2+3i$ b) $t+i$, wobei $t\in\mathbb{R}$ beliebig c) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}+i,\ -\frac{1}{2}-i$
   d) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\,i$ e) $1+i$ f) $\frac{1}{2}+t(1+i)$, wobei $t\in\mathbb{R}$ beliebig

3. a) $w=-3,\ z=2i$ b) $w=3-2i,\ z=2+i$ c) $14-11i,\ z=2-i$
   d) $w=2-i,\ z=1+i$ e) $w=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,i,\ z=1+\frac{1}{3}\,i$ f) $w=\frac{33}{2}-\frac{5}{2}\,i,\ z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\,i$

4. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$
   b) $2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i$
   c) $\sqrt[8]{2}\operatorname{cis}(56.25°),\ \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}(146.25°),\ \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}(236.25°),\ \sqrt[8]{2}\operatorname{cis}(326.25°)$
   d) $1,\ \frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,i,\ -\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\,i,\ -\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\,i,\ \frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,i$

5. a) $2\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{15}},\ 2\,\mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{15}},\ 2\,\mathrm{e}^{i\frac{14\pi}{15}},\ 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}},\ 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{4\pi}{15}}$ b) $\sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}},\ \sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}},\ \sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$
   c) $0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\,i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\,i$ d) $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{11\pi}{12}}$

6. Damit die Gleichung komplexe Lösungen hat, muss die Diskriminante D negativ sein. Die Lösungen sind dann $z_1=\frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a}=\frac{-b}{2a}+i\,\frac{\sqrt{|D|}}{2a}$ und $z_2=\frac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a}=\frac{-b}{2a}-i\,\frac{\sqrt{|D|}}{2a}$.
   Da a, b und $\sqrt{|D|}$ reelle Zahlen sind, sind z_1 und z_2 konjugiert komplex .

7. a) $3\pm 2i$ b) $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ c) $\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{5}\,i$ d) $-1\pm\frac{1}{2}\,i$ e) $-5,\ 9$ f) $\pm i,\ \pm\sqrt{3}\,i$ g) $-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}i$ h) $0,\ 1\pm i$

8. a) $1,\ i$ b) $1+i,\ \frac{1}{4}+i$ c) $2+3i,\ -2-i$

9. a) $-\frac{\sqrt{2}+2}{2}+\frac{\sqrt{2}-2}{2}\,i,\ \frac{\sqrt{2}-2}{2}-\frac{\sqrt{2}+2}{2}\,i$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}+2}{2}\,i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}-2}{2}\,i$
   c) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i,\ \frac{5}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i,\ i,\ -1$

10. a) $1-2i,\ -1+i$ b) $i,\ -2i$
    c) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i,\ \pm\sqrt{2}\,i$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i,\ -\sqrt{3}-i,\ \sqrt{3}-i,\ 2i,\ -i$

11. Eine Gleichung 3. Grades mit reellen Koeffizienten entsteht bei der Nullstellenbestimmung einer Polynomfunktion der Art $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Diese Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig. Da die Grenzwerte für $x\to\infty$ und $x\to-\infty$ einmal ∞ und einmal $-\infty$ sind, muss der Graph die x-Achse schneiden. Somit hat jede Gleichung 3. Grades mit reellen Koeffizienten mindestens eine reelle Lösung.

12. Die Diskriminante wird $D=-4$, die Lösungen für $w=\pm 2i$. Für $w=2i$ wird die Lösung für u mit dem kleinsten Argument $u=1+i$. Sie ist also komplex. Damit wird dann $z=2$. (Wählst du für $w=-2i$ führt die Lösung $u=1-i$ zur reellen Lösung $z=2$.)

13. a) $-6,\ 3\pm i$ b) $3,\ \pm\sqrt{3}$ c) $2-2i,\ -1+i$ (Doppellösung)

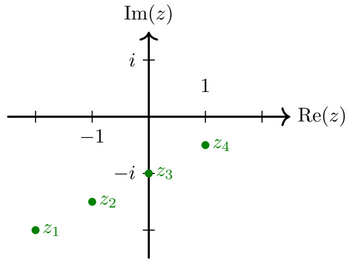
14. a) i (Doppellösung), $2-i,\ -2-i$
    b) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$
    c) $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\,i,\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\,i,\ \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

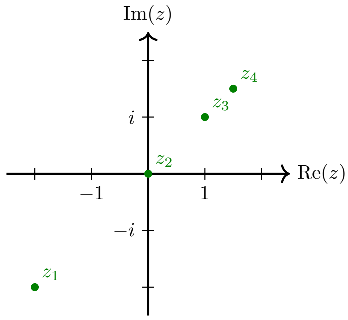
15. a) $\frac{3}{2},\ \pm i$ b) $\frac{1}{3},\ -2,\ \pm\sqrt{2}\,i$ c) $\pm 1,\ -2$ d) $\pm\sqrt{2},\ \pm i,\ \pm\sqrt{3}$

16. a) $2-i$ b) $1+2i$ c) $1+i$
    d) $z=1+i,\ w=-1+i$ e) $i,\ -2i$ f) $i,\ -1+i$
    g) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i),\ \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\left(-1-\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i\right),\ \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\left(-1+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)i\right)$
    h) $3,\ 2i$ i) $\pm\sqrt{3}i,\ \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)$

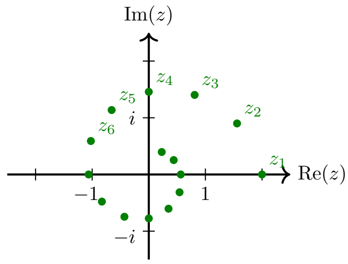
3. Kapitel

1. a) Rechnung in Normalform.
$z_2 = -1 - \frac{3}{2}\,i$, $z_3 = -i$, $z_4 = 1 - \frac{1}{2}\,i$, ... Realteil und Imaginärteil bilden je eine arithmetische Folge. Von Glied zu Glied wird der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ addiert. Die Punkte streben ins Unendliche.

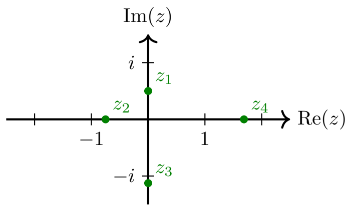


b) 

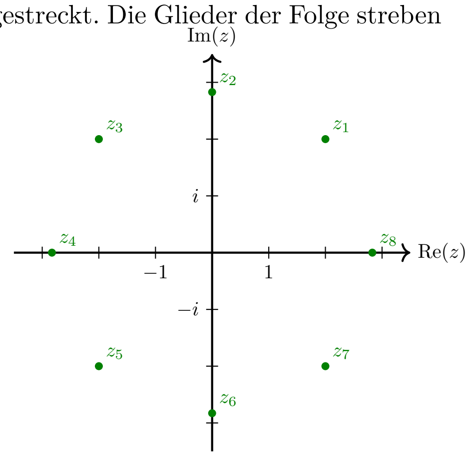
Rechnung in Normalform.
$z_2 = 0$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,i$, ... Von Glied zu Glied wird ein immer um den gleichen Faktor kürzer werdender, zum vorhergehenden kollinearen Vektor addiert. Realteil und Imaginärteil bilden je eine geometische Folge. Der Grenzwert der Folge ist $2 + 2i$.



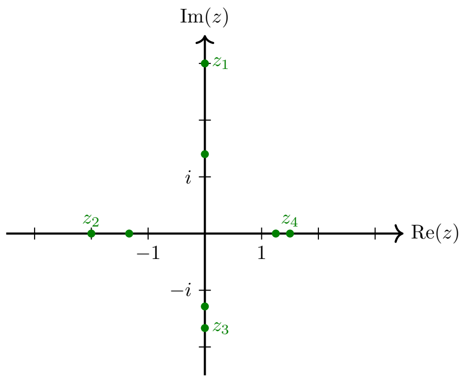
c) Rechnung in Exponentialform.
$z_2 = \frac{9}{5}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_3 = \frac{81}{50}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_4 = \frac{729}{500}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$, ... Jeder komplexen Zahl entspricht ein Ortsvektor. Von Glied zu Glied wird dieser um den Winkel 30° gedreht und um den Faktor $\frac{9}{10}$ verkürzt. Der Grenzwert der Folge ist 0.

d) 

Rechnung in Exponentialform.
$z_2 = -\frac{3}{4}$, $z_3 = -\frac{9}{8}\,i$, $z_4 = \frac{27}{16}$, ... $\frac{3}{2}\,i = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$. Jeder komplexen Zahl entspricht ein Ortsvektor. Von Glied zu Glied wird dieser um den Winkel 90° gedreht und um den Faktor $\frac{3}{2}$ gestreckt. Die Glieder der Folge streben ins Unendliche.



e) Rechnung in Exponentialform.
$z_2 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$,
$z_3 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_4 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi}$, ... Jeder komplexen Zahl entspricht ein Ortsvektor. Von Glied zu Glied wird dieser um den Winkel 45° gedreht. Die Punkte liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $2\sqrt{2}$. Es gilt $z_{n+8} = z_n$. Die Glieder der Folge bilden einen *Zyklus der Länge 8*.

f) 

Rechnung in Normalform.
$z_1 = 3i$, $z_2 = -2$, $z_3 = -\frac{5}{3}\,i$, $z_4 = \frac{3}{2}$, ... Die Glieder der Folge streben gegen einen Zyklus der Länge 4 mit den Punkten 1, i, -1, $-i$.

2. $z_n = n - 1 - i\,n$. Real- und Imaginärteil bilden arithmetische Folgen. Die Glieder der Folge streben ins Unendliche.

3. $z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}$, $z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$, $z_3 = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}$. Die Folge bildet einen Zyklus der Länge 8.

4. Die Glieder z_n mit $n = 1 + 3k$, $k = 1, 2, ...$ sind rein imaginär. Es gibt keine reellen Glieder der Folge.

5. $z_1 = 2$, $z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{6}}\ z_n$, $z_n = 2\,(e^{i\frac{\pi}{6}})^{n-1}$

6. Grenzwert 0 für $|a| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zyklus der Länge 12 für $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Die Zykluslänge ist 12, da $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2i}) = e^{i\frac{\pi}{6}}$. $U = 48\sin(15°) = 24\sqrt{2-\sqrt{3}} = 12\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

8. a) $z_1 = 16i$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}i\,z_n$, $z_n = 16i\ \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}$
   b) Alle Glieder mit $n \geq 12$
   c) $z_n = 16\,e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{n-1}$ und $z_n = 16\,e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^{n-1}$

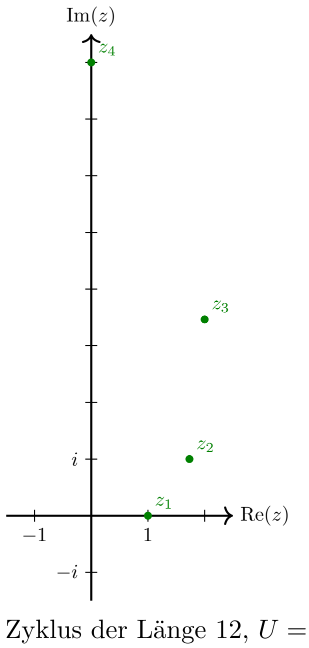
9. $z_1 = 0$, $z_{n+1} = i\,z_n + 1$
   $z_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$

10. 0 ist anziehend, 1 ist abstossend

11. Die Juliamenge ist der Einheitskreis, der Einzugsbereich ist das Innere, der Divergenzbereich das Äussere des Einheitskreises.

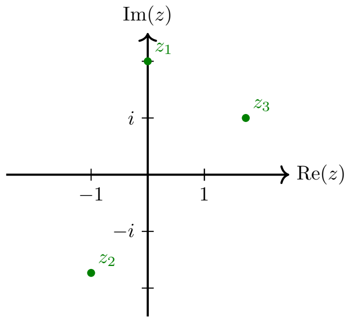
12. a) Explizit: $z_n = i\ (-2i)^{n-1}$
    Rekursiv: $z_1 = i$, $z_{n+1} = (-2i)\,z_n$
    Die Folge divergiert
    b) Es gibt drei Lösungen.
    Die rekursiven Definitionen sind: $z_1 = i$, $z_{n+1} = 2^{\frac{1}{3}}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\ z_n$, $z_{n+1} = 2^{\frac{1}{3}}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}\ z_n$, $z_{n+1} = 2^{\frac{1}{3}}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}\ z_n$

13. a) $z_1 = 1$, $z_2 = \sqrt{3} + i = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_3 = 2 + 2\sqrt{3}\,i = 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_4 = 8i = 8\,e^{i\frac{\pi}{2}}$, 9 Glieder

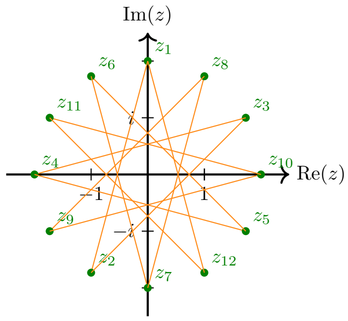


    b) Zyklus der Länge 12, $U = 12 \cdot |z_2 - z_1| = 12\sqrt{2-\sqrt{3}} = 24 - 12\sqrt{3}$, $A = 3$
    c) Lässt man in den beiden neuen Folgen den Faktor $(1 + \frac{1}{n})$ weg, so bilden sie den gleichen Zyklus wie z_n, allerdings um $1 + i$ aus dem Nullpunkt verschoben. c_n nähert sich von aussen, d_n von innen diesem Zyklus an.

14. a) $z_1 = 2i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = -1-\sqrt{3}\,i = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = \sqrt{3}+i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$



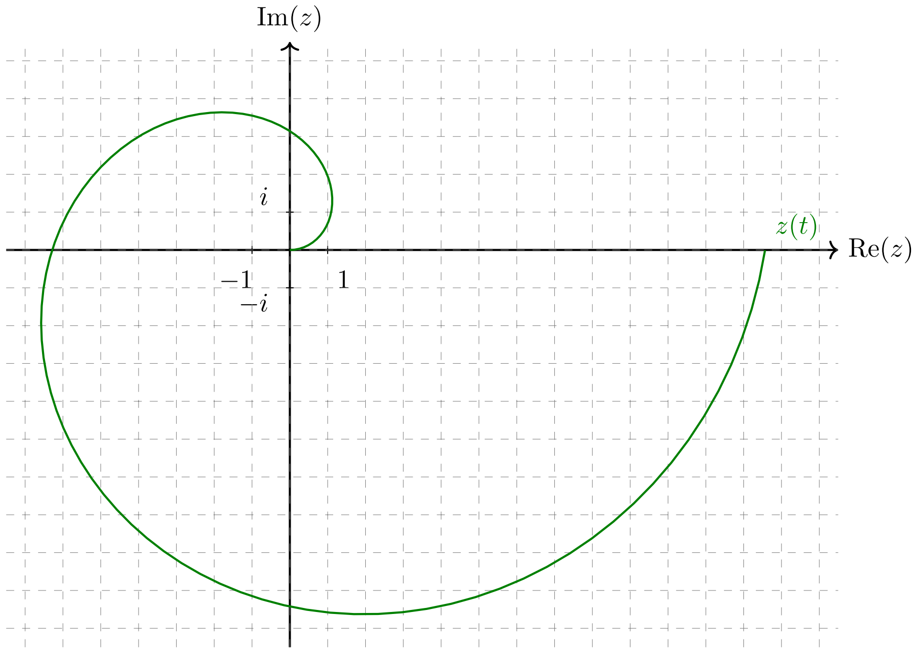
b) $n = 13$



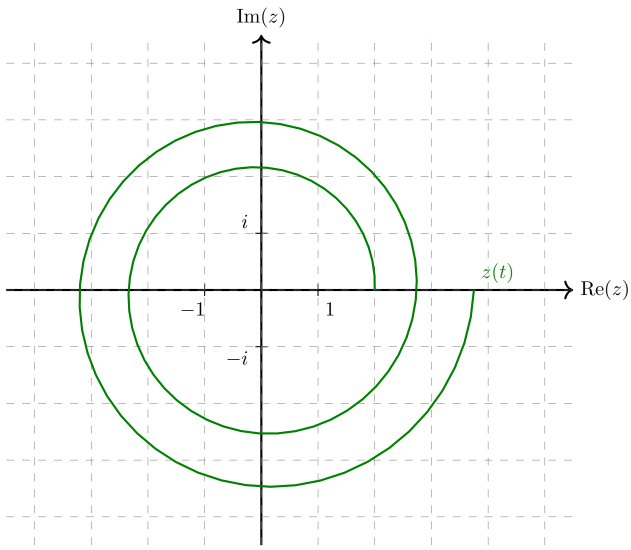
c) $12\sqrt{8+4\sqrt{3}} = 24\sqrt{2+\sqrt{3}}$

4. Kapitel

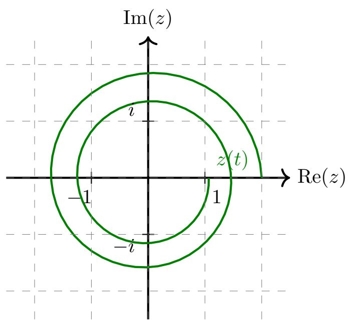
1. a) Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, der Einheitskreis
   b) Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 2
   c) Kreis mit Mittelpunkt $3+2i$ und Radius 4
   d) Archimedische Spirale



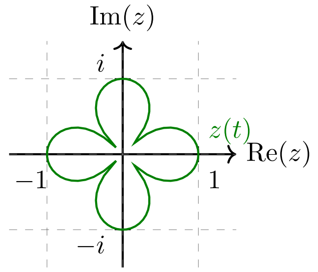
   e) Logarithmische Spirale, für wachsende t sich nach aussen öffnend



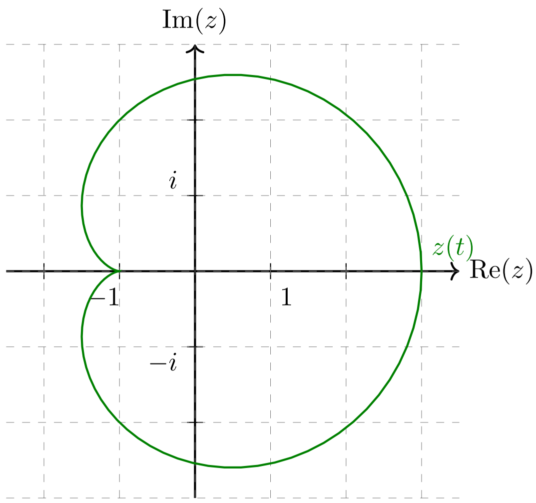
   f) Logarithmische Spirale, für wachsende t strebt sie gegen 0



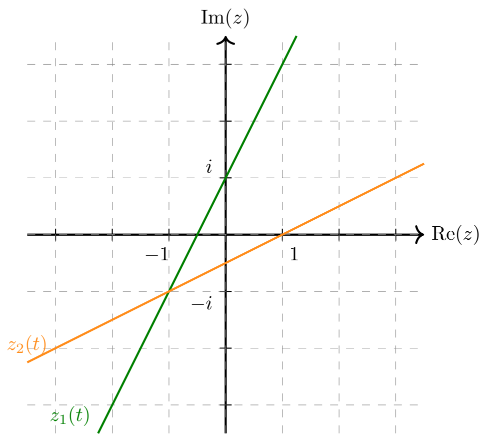
2. a) Hochgestellte Ellipse mit Mittelpunkt 0, grosser Halbachse 2 und kleiner Halbachse 1
   b) Ellipse mit Mittelpunkt 0, grosser Halbachse 3 und kleiner Halbachse 2
   c) Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}\,i$ und Radius $\frac{1}{2}$
   d) Zwei Kreise mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ bzw. $-\frac{1}{2}$ und Radius jeweils $\frac{1}{2}$
   e) Rosette mit vier Schleifen



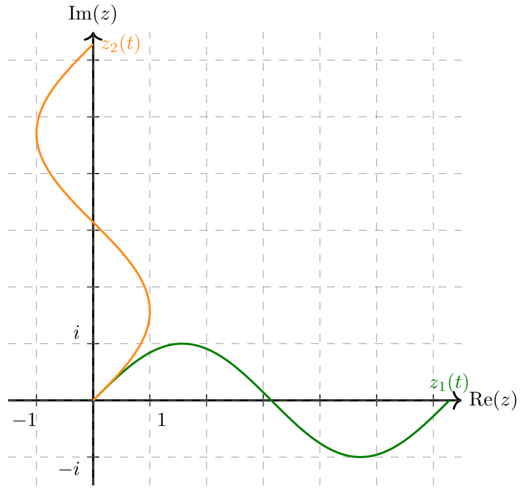
   f) Kardioide



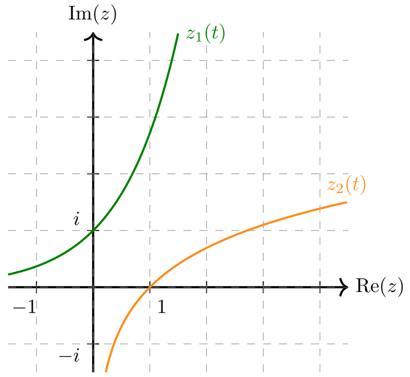
3. a) Die beiden Funktionen sind Umkehrfunktionen zueinander, $y = 2x + 1$ und $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.



b) Für $t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ sind die beiden Funktionen Umkehrfunktionen, $y = \sin(x)$ und $y = \arcsin(x)$.



c) Die beiden Funktionen sind Umkehrfunktionen zueinander, $y = \mathrm{e}^x$ und $y = \ln(x)$.



4. a) $y = x^2$
   b) $z(t) = t + 2 + it^2$
   c) $z(t) = t + i(t^2 + 3)$
   d) $z(t) = (t + it^2)\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$
   e) $z(t) = (t + it^2)2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$
   f) $z(t) = (t + it^2)4\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} + 1 + 2i$

5. Es gibt für alle Kurven in der Exponentialform mehrere Möglichkeiten. Hier wird jeweils eine angegeben. Reihenfolge 1. Quadrant, 2. Quadrant, 3. Quadrant, 4. Quadrant:
   $z(t) = (t + it^2)\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} + 2 + 2i = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,t - \frac{\sqrt{2}}{2}\,t^2 + i(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t - \frac{\sqrt{2}}{2}\,t^2)$ für $-1.25... \leq t \leq 1.25...$
   $z(t) = (t + it^2)\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}} - 2 + 2i = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,t + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t^2 + i(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,t - \frac{\sqrt{2}}{2}\,t^2)$ für $-1.25... \leq t \leq 1.25...$
   $z(t) = (t + it^2)\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} - 2 - 2i = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t^2 + i(-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,t + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t^2)$ für $-1.25... \leq t \leq 1.25...$
   $z(t) = (t + it^2)\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} + 2 - 2i = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t - \frac{\sqrt{2}}{2}\,t^2 + i(-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t + \frac{\sqrt{2}}{2}\,t^2)$ für $-1.25... \leq t \leq 1.25...$
   $A \approx 16.826$

6. a) $f(x) = \sin(x)$ besitzt in $x = 0$ die Steigung 1, da $f'(0) = 1$ ist.
   b) $z(t) = (t + i\sin(t))\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} + \pi = -\sin(t) + \pi + it$ für $0 \leq t \leq \pi$
   $z(t) = (t - i\sin(t)) + i\pi = t + i(\pi - \sin(t))$ für $0 \leq t \leq \pi$
   $z(t) = (t + i\sin(t))\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} + i\pi = \sin(t) + i(\pi - t)$ für $0 \leq t \leq \pi$
   c) $A = \pi^2 - 8$

7. Es gibt für alle Kurven in der Exponentialform mehrere Möglichkeiten. Hier wird jeweils eine angegeben.
   a) $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$
      $z(t) = t + i\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sin(t)$ für $0 \leq t \leq \pi$
      $z(t) = (t + i\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sin(t))\,\mathrm{e}^{i\,\frac{2\pi}{3}} + \pi = -\frac{1}{2}\,t - \frac{1}{2}\,\sin(t) + \pi + i(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\sin(t))$ für $0 \leq t \leq \pi$
      $z(t) = (t - i\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sin(t))\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(t) + \pi + i(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\sin(t))$ für $0 \leq t \leq \pi$
      $A = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\pi^2 - 2\sqrt{3}$
   b) $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$
      $z(t) = t + i\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}\,t))$ für $0 \leq t \leq \sqrt{3}\pi$
      $z(t) = (t + i\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}\,t))\,\mathrm{e}^{i\,\frac{2\pi}{3}} + \sqrt{3}\pi = \sqrt{3}\pi - \frac{1}{2}\,t - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}\,t) + i(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t - \frac{1}{2}\,\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}\,t))$ für $0 \leq t \leq \sqrt{3}\pi$
      $z(t) = (t - i\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}\,t))\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}\,t) + i(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t - \frac{1}{2}\,\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}\,t))$ für $0 \leq t \leq \sqrt{3}\pi$
      $A = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\pi^2 - 6\sqrt{3}$
   c) $b = \frac{1}{\sqrt{3}a}$
      $z(t) = t + ia\sin(\frac{1}{\sqrt{3}a}\,t))$ für $0 \leq t \leq \sqrt{3}\pi a$
      $z(t) = (t + ia\sin(\frac{1}{\sqrt{3}a}\,t))\,\mathrm{e}^{i\,\frac{2\pi}{3}} + \sqrt{3}\pi a = \sqrt{3}\pi a - \frac{1}{2}\,t - \frac{\sqrt{3}}{2}a\sin(\frac{1}{\sqrt{3}a}t) + i(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t - \frac{1}{2}a\sin(\frac{1}{\sqrt{3}a}\,t))$ für $0 \leq t \leq \sqrt{3}\pi a$
      $z(t) = (t - ia\sin(\frac{1}{\sqrt{3}a}\,t))\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\,t + \frac{\sqrt{3}}{2}a\sin(\frac{1}{\sqrt{3}a}\,t) + i(\frac{\sqrt{3}}{2}\,t - \frac{1}{2}a\sin(\frac{1}{\sqrt{3}a}\,t))$ für $0 \leq t \leq \sqrt{3}\pi a$
      $A = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\pi^2 a^2 - 6\sqrt{3}a^2$

8. Es gilt $z\overline{z} = |z|^2$ und somit: $(z - m)\,\overline{(z - m)} = (z - m)(\,\overline{z} - \overline{m}\,) = r^2$. Ausmultiplizieren gibt die Gleichung $z\,\overline{z} - \overline{m}\,z - m\,\overline{z} + m\,\overline{m} - r^2 = 0$. Es ist $c = m\,\overline{m} - r^2$ reell, der Radius damit $r = \sqrt{m\,\overline{m} - c}$ für $m\,\overline{m} - c > 0$.

9. a) $|z - (5 + i)| = \sqrt{22}$, $m = 5 + i$, $r = \sqrt{22}$
   b) $|z - (8 - i)| = 4$, $m = 8 - i$, $r = 4$
   c) Keine Lösung
   d) Punkt $3 + 4i$

10. a) $z\,\overline{z} - (1 - i)z - (1 + i)\,\overline{z} + 1 = 0$
    b) $z\,\overline{z} - (-2 - 3i)z - (-2 + 3i)\,\overline{z} + 9 = 0$
    c) $z\,\overline{z} - (4 + 6i)z - (4 - 6i)\,\overline{z} + 36 = 0$
    d) $z\,\overline{z} - (-1 - 3i)z - (-1 + 3i)\,\overline{z} + 1 = 0$

11. Einsetzen von $b = b_1 + ib_2$ und $z = x + iy$ in die Gleichung $\overline{b}\,z + b\,\overline{z} + c = 0$ führt auf die reelle Geradengleichung $2b_1x + 2b_2y + c = 0$.

12. Einsetzen von $x = \mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $y = \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ in die Geradengleichung $px + qy + r = 0$:
    $p\,\frac{(z+\overline{z})}{2} + q\,\frac{(z-\overline{z})}{2i} + r = 0$
    Ausmultiplizieren und zusammenfassen: $(q + pi)z + (-q + pi)\,\overline{z} + 2ir = 0$
    Nun multiplizieren mit $-i$: $(p - qi)z + (p + qi)\,\overline{z} + 2r$. Es ist $b = p + qi$ und $2r = c$ reell.

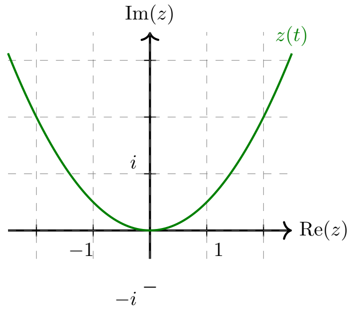
13. a) $(2 + i)z + (2 - i)\,\overline{z} + 6 = 0$
    b) $iz - i\,\overline{z} - 10 = 0$
    c) $(1 - 3i)z + (1 + 3i)\,\overline{z} - 24 = 0$
    d) $z + \overline{z} - 6 = 0$
    e) $y = \frac{3}{2}$
    f) $y = \frac{5}{2}x + 1$
    g) $y = x - \frac{1}{4}$
    h) $x = -\frac{1}{2}$

14. a) Einsetzen von $b = b_1 + ib_2$ und $z = x + iy$ in die Gleichung $\overline{b}\,z + b\,\overline{z} + c = 0$ führt auf die reelle Geradengleichung $2b_1x + 2b_2y + c = 0$.
       $\binom{b_1}{b_2}$ ist ein Normalenvektor der Geraden und somit $\binom{b_2}{-b_1}$ ein Richtungsvektor.
       Der Richtungsvektor wird komplex geschrieben $b_2 - ib_1$, was gleich ib ist.
    b) Die zur Geraden senkrechte Gerade durch 0 ist $y = \frac{b_2}{b_1}x$.
       Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist $S(-\frac{c}{2}\,\frac{b_1}{b_1^2+b_2^2}\,|\,-\frac{c}{2}\,\frac{b_2}{b_1^2+b_2^2})$,
       komplex geschrieben $-\frac{c}{2}\,\frac{1}{b_1^2+b_2^2}\,(b_1 + ib_2) = -\frac{c}{2}\,\frac{b}{b\,\overline{b}} = -\frac{c}{2\,\overline{b}}$.
       Der gesuchte Abstand ist $\left|-\frac{c}{2\,\overline{b}}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{|c|}{|b|}$.

15. Ellipse mit Mittelpunkt 1, grosser Halbachse 2 und kleiner Halbachse 1

16. $f(x) = \arccos(x)$, $f(x) = -\sin(x)$ für $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

17.



$z(t) = \frac{1}{2}\,t^2 - it$, $A = \frac{4}{3}$

18. a) $z(t) = t + i\sin(t)$, $-\pi \le t \le \pi$
    b) $D(0|\frac{\sqrt{3}}{3}\pi)$
    c) Es gibt für alle Kurven in der Exponentialform mehrere Möglichkeiten. Hier wird jeweils eine angegeben.
    $z_2(t) = (t + i\sin(t))\,e^{i\frac{2\pi}{3}} + \frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t) + i(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,t - \frac{1}{2}\sin(t))$ für $-\pi \le t \le \pi$
    $z_3(t) = (t + i\sin(t))\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} - \frac{\pi}{2} + i\,\frac{\pi}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t) + i(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,t + \frac{1}{2}\sin(t))$ für $-\pi \le t \le \pi$
    d) $60°$
    e) $A = \sqrt{3}\,\pi^2$

5. Kapitel

1. a) $w_1 = 6 + i$, $w_2 = 9 + i$ und $w_3 = 9 + 3i$. Translation um den Vektor $\binom{4}{0}$, keine Fixpunkte.
   b) Identität. Jeder Punkt ist ein Fixpunkt.
   c) $w_1 = -2 - i$, $w_2 = -5 - i$ und $w_3 = -5 - 3i$. Spiegelung am Nullpunkt, Fixpunkt ist 0.
   d) $w_1 = 2 - i$, $w_2 = 5 - i$ und $w_3 = 5 - 3i$. Spiegelung an der reellen Achse. Alle Punkte auf der reellen Achse sind Fixpunkte.
   e) $w_1 = 6+3i$, $w_2 = 15+3i$ und $w_3 = 15+9i$. Zentrische Streckung mit Zentrum 0 und Streckfaktor 3, Fixpunkt ist 0.
   f) $w_1 = -4 - 2i$, $w_2 = -10 - 2i$ und $w_3 = -10 - 6i$. Zentrische Streckung mit Zentrum 0 und Streckfaktor 2 verbunden mit Punktspiegelung am Nullpunkt, Fixpunkt ist 0.
   g) $w_1 = 4 + 4i$, $w_2 = 7 + 4i$ und $w_3 = 7 + 6i$. Translation um den Vektor $\binom{2}{3}$, keine Fixpunkte.
   h) $w_1 = -1 + 2i$, $w_2 = -1 + 5i$ und $w_3 = -3 + 5i$. Drehung um 0, Drehwinkel 90°, Fixpunkt ist 0.
   i) $w_1 = 1 + 3i$, $w_2 = 4 + 6i$ und $w_3 = 2 + 8i$. Drehstreckung um 0, Drehwinkel 45°, Streckfaktor $\sqrt{2}$, Fixpunkt ist 0.
   j) $w_1 = -2$, $w_2 = -5$ und $w_3 = -5$. Normalprojektion auf die reelle Achse. Alle Punkte der reellen Achse sind Fixpunkte.
   k) $w_1 = 5$, $w_2 = 26$ und $w_3 = 34$.Alle Punkte werden auf die reelle Achse abgebildet. Fixpunkte sind 0 und 1.
   l) $w_1 = 2i$, $w_2 = 2i$ und $w_3 = 6i$.Alle Punkte werden auf die imaginäre Achse abgebildet. Fixpunkt ist 0.

2. a) $w = z + 3i$ b) $w = z - 2$ c) $w = 4z$
   d) $w = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i)z$ e) $w = (-\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i)z$

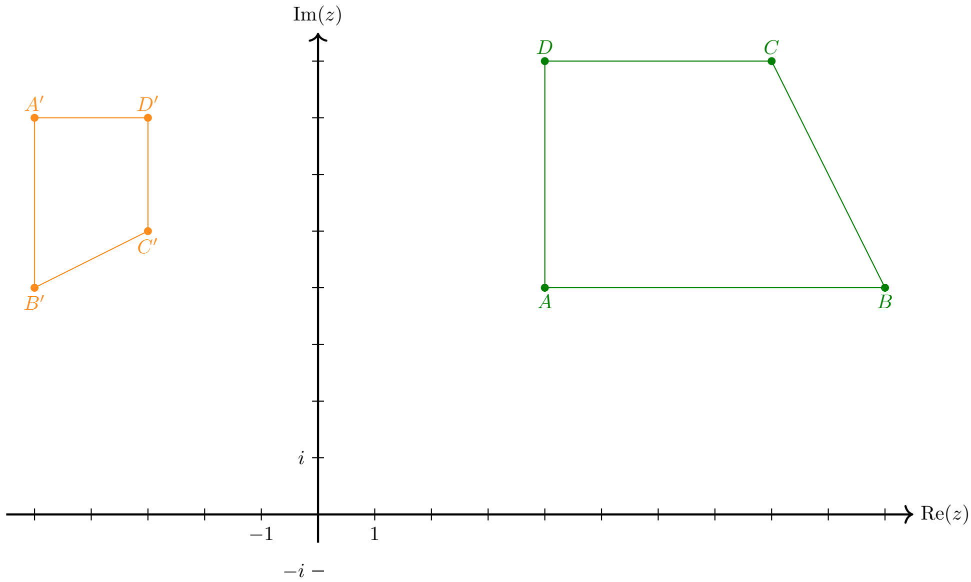
3. a) $w_1 = -3 + 2i$, $w_2 = -6 + 5i$ und $w_3 = -8 + 3i$. Drehstreckung um 0, Drehwinkel 135°, Streckfaktor $\sqrt{2}$, anschliessend Verschiebung um $\binom{0}{1}$, Fixpunkt ist $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\, i$.
   b) $w_1 = 1 + 2i$, $w_2 = 7 + 2i$ und $w_3 = 7 + 6i$. Zentrische Streckung mit Zentrum 3 und Streckfaktor 2, Fixpunkt ist das Streckzentrum.

4. a) $w = -(z - i) + i = -z + 2i$ b) $w = 2(z - 2 - 3i) + 2 + 3i = 2z - 2 - 3i$
   c) $w = i(z - 1 - i) + 1 + i = iz + 2$ d) $w = (\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i)(z - 2 + 3i) + 2 - 3i$

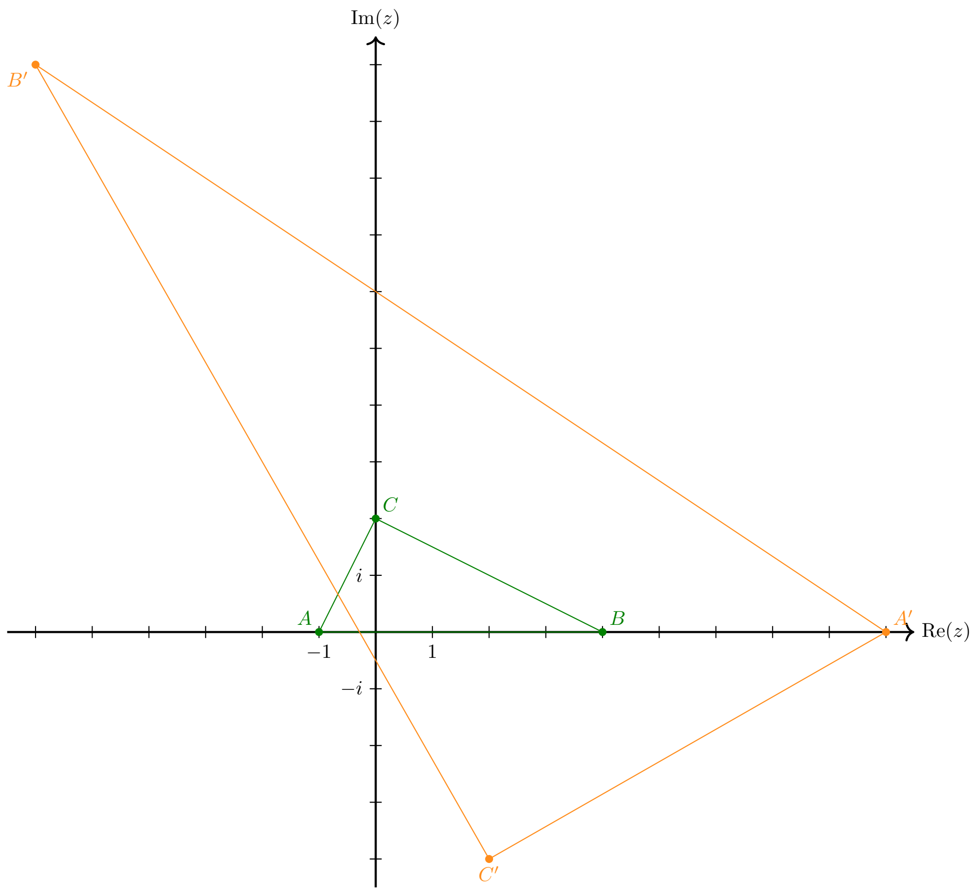
5. a) $A' = 4i$, $B' = 4 + 4i$, $M' = 2 + 4i$. M' ist Mittelpunkt von $\overline{A'B'}$.
   b) $A' = 2 + 4i$, $B' = 1 + 3i$, $M' = \frac{4}{3} + \frac{10}{3}\, i$. M' liegt auf der Strecke $\overline{A'B'}$, ist aber nicht der Mittelpunkt.
   c) $A' = 2i$, $B' = 4$, $M' = 2 + \frac{3}{2}\, i$. M' ist nicht Mittelpunkt von $\overline{A'B'}$.
   d) $A' = 6 + 2i$, $B' = 8$, $M' = 7 + i$. M' ist Mittelpunkt von $\overline{A'B'}$.

6. Der Fixpunkt p ist $p = \frac{b}{1-a}$.
   Damit kann die Abbildung $w = az + b$ umgeformt werden in $w = a(z - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}$.
   Geometrisch entspricht dies Folgendem: Zuerst wird so verschoben, dass der Fixpunkt der Nullpunkt ist, dann wird gemäss a eine Drehstreckung um den Ursprung ausgeführt und anschliessend wird wieder zurück verschoben.

7. a) $A' = -5+7i$, $B' = -5+4i$, $C' = -3+5i$, $D' = -3+7i$. Drehstreckung (Zentrum 0, Streckfaktor $\frac{1}{2}$, Drehwinkel 270°), anschliessend Verschiebung um $\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}$.



b) $A' = 9$, $B' = -6+10i$, $C' = 2-4i$. Drehstreckung (Zentrum 0), Streckfaktor $\sqrt{13}$, Drehwinkel 146.3°, anschliessend Verschiebung um $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.



8. a) $v = u - 2$
   b) Kreis mit Mittelpunkt $3+i$ und Radius $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   c) $y = x + 1$

9. a) $v = \frac{1}{2}u - 1$
   b) Kreis mit Mittelpunkt -3 und Radius $\sqrt{80}$
   c) $y = 2x$

10. $C' = -1 - 4i$, $w = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,i)z - \frac{5}{2} - \frac{7}{2}\,i$

11. $C = 2 + \sqrt{3} + (1 - 2\sqrt{3})i$

12. $z = -1 + i$ oder $z = -1 - i$

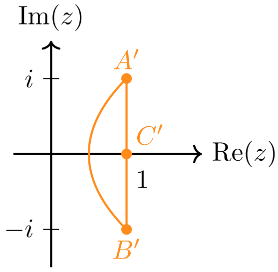
13. $-1 + i$

14. $w = -iz + 2i$. Der Radius ist 2.

15. a) 0 und $-i$
    b) Die Abbildungsgleichungen sind $u = -2xy$ und $v = x^2 - y^2$. Die Bilder der Kurven: positive imaginäre Achse inkl. 0, negative imaginäre Achse inkl. 0, negative reelle Achse inkl. 0, $v = \frac{3}{4}u$, $v = 4 - \frac{1}{16}u^2$

16. a) $1 - 2i$, $-1 + i$
    b) Die Abbildungsgleichungen sind $u = -2xy - 3$ und $v = x^2 - y^2 + 1$. Die Bilder der Kurven: $u = -3$ mit $v \geq 1$, $u = -3$ mit $v \leq 1$, $v = -\frac{1}{4}(u + 3)^2 + 2$, $v = \frac{4}{3}u + 5$

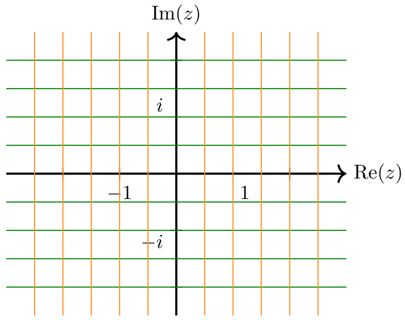
17. a) Die Bildpunkte von A, B und C sind $A' = 1 + i$, $B' = 1 - i$ und $C' = 1$. Die Seite $\overline{AB}$ wird auf die Parabel $v^2 = 2(u - \frac{1}{2})$ abgebildet, die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ auf die Gerade $u = 1$. Das Innere des Dreiecks ABC wird auf das Innere der Bildfigur abgebildet.

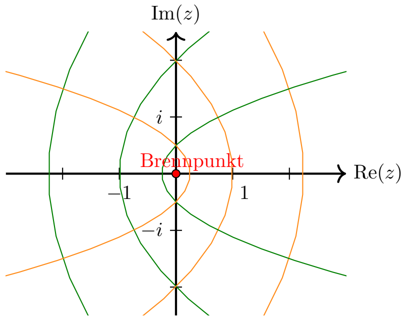


    b) Der Fusspunkt der Höhe h_c wird auf den Punkt $\frac{1}{2}$ abgebildet.

18. Die Abbildungsgleichungen sind $u = x^2 - y^2$ und $v = 2xy$.
    a) 0 und 1
    b) Positive reelle Achse (inkl. 0)
    c) Negative reelle Achse (inkl. 0)
    d) Positive imaginäre Achse (inkl. 0), negative imaginäre Achse (inkl. 0)
    e) Die Bilder der Geraden $y = mx$ für $m = 1$ und $m = -1$ hast du in der Teilaufgabe b untersucht. Für $m \neq 1$ und $m \neq -1$ it die Lösung: Halbgeraden $v = \frac{2m}{1-m^2}u$. Für $m > 0$: Teil oberhalb der reellen Achse (inkl. 0), für $m < 0$: Teil unterhalb der reellen Achse (inkl. 0)

f) Die Bilder waagrechter Geraden $y = k$ sind nach rechts geöffnete Parabeln $v^2 = 4k^2(u + k^2)$, die Bilder senkrechter Geraden $x = k$ nach links geöffnete Parabeln $v^2 = 4k^2(-u + k^2)$.
Der Scheitelpunkt der Parabel $v^2 = 4k^2(u + k^2)$ ist $S(-k^2, 0)$. Ihr Brennpunkt liegt um k^2 rechts vom Scheitelpunkt, somit im Nullpunkt. Analoges gilt für die Parabeln $v^2 = 4k^2(-u + k^2)$.





g) Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius r^2. Der Punkt $z = r\,e^{i\varphi}$ wird um r gestreckt und um φ gedreht (Zentrum ist 0).

19. a) Einen Fixpunkt für $(b-1)^2 - 2ac = 0$ (für $b = 1$ und $c = 0$ den Nullpunkt), sonst zwei Fixpunkte.
   b) 1. Translation $w_1(z) = z - \frac{b}{2a}$, 2. $w_2(z) = z^2$, 3. Drehstreckung $w_3(z) = az$, 4. Translation $w_4(z) = z - \frac{b^2}{4a} + c$.

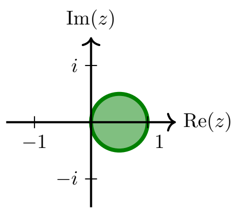
20. a) Mit $z = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$ wird $w = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{r\,\mathrm{cis}(-\varphi)} = \frac{1}{r}\,\mathrm{cis}(\varphi)$.
   Aus der Konstruktion siehst du, dass gilt: $MP' : 1 = 1 : MP$. Mit $r = MP$ wir somit $MP' = \frac{1}{r}$.
   b) Geometrisch ist sofort klar, dass alle Punkte des Einheitskreises Fixpunkte sind. Rechnerisch: $z = \frac{1}{\overline{z}}$, somit $z\,\overline{z} = 1$. Mit $z = x + iy$ erhältst du $x^2 + y^2 = 1$, also die Gleichung des Einheitskreises.

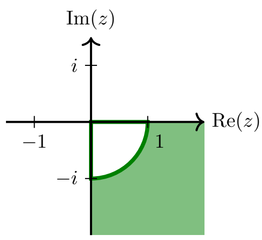
21. a) Das Bild ist die gleiche Gerade. Allerdings werden Punkte ausserhalb des Kreises auf Punkte innerhalb des Kreises abgebildet und umgekehrt.
   b) Das Bild ist wiederum ein Kreis mit Mittelpunkt 0. Hat der vorgegebene Kreis den Radius r, so hat der Bildkreis den Radius $\frac{1}{r}$.
   c) Vermutung: Das Bild ist ein Kreis mit Durchmesser OT (T ist der Berührpunkt der Tangente mit dem Kreis).
   d) Vermutung: Das Bild ist ein Kreis, welcher den Einheitskreis von Innen berührt.
   e) Vermutung: Das Bild ist eine Gerade.

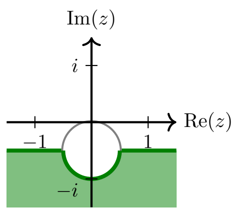
22. a) Die Abbildungsgleichungen sind $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $v = \frac{y}{x^2+y^2}$. Das Bild der Geraden $y = m\,x$ ist $v = m\,u$.
   b) $u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}$
   c) $u^2 + (v - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
   d) $u = 1$
   e) $(u - \frac{2}{3})^2 + v^2 = \frac{1}{9}$

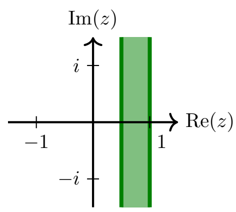
23. a) Die Inversion ist eine Verkettung der Spiegelung an der reellen Achse und der Inversion am Einheitskreis. (Die Reihenfolge spielt keine Rolle.)
   b) $v = -u$
   c) $v = -1$

24.

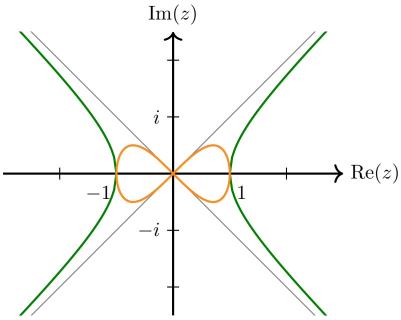
a)


b)


c)


d)


25. Die Punkte 1 und -1 sind Fixpunkte. Die Kurve besteht aus zwei kongruenten Teilen, welche im Nullpunkt aufeinander treffen und dort eine Spitze aufweisen. Anhand der Asymptoten siehst du, dass diese Spitzen einen Winkel von 90° besitzen.

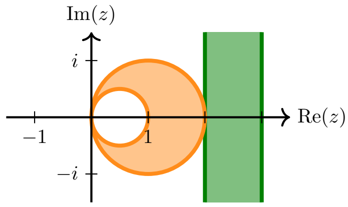


26. a) 1. Bild: Gerade $y = 1$, 2. Bild: Kreis $\left|z + \frac{1}{2}\,i\right| = \frac{1}{2}$, 3. Bild: Kreis $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$
    b) $w = \frac{i}{iz+i} = \frac{1}{z+1}$

27.

a) Gerade $x = 2$ wird zum Kreis $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, Gerade $x = 3$ wird zum Kreis $|w - 1| = 1$

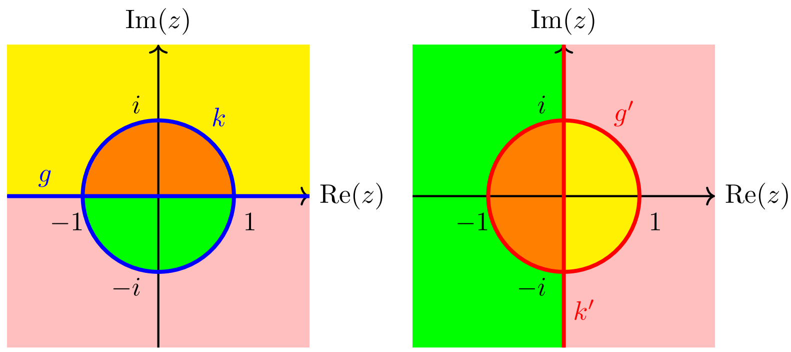
b)



28.

a) $k' :\ \mathrm{Re}(w) = 0$, $g' :\ |w| = 1$

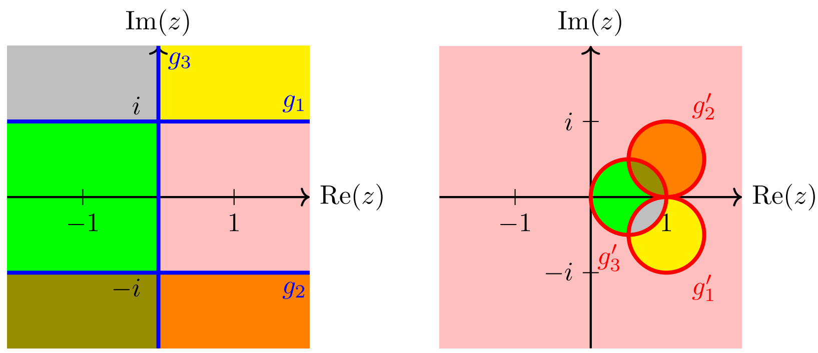
b)



29.

a) $g_1' :\ \left|w - 1 + \frac{1}{2}\,i\right| = \frac{1}{2}$, $g_2' :\ \left|w - 1 - \frac{1}{2}\,i\right| = \frac{1}{2}$, $g_3' :\ \left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

b)



30. a) $w = 3iz$
    b) $w = (3+4i)z - 6 - 12i$
    c) $w = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)z + 2 + (2+\sqrt{2})\,i$

31. $v = -3u + 5$, Kreis mit Mittelpunkt $2 + 4i$ und Radius $\sqrt{5}$

32. a) $v = -u - 2$
    b) Kreis mit Mittelpunkt $-1 - 4i$ und Radius 1

33. $\frac{5}{2}\,i$

34. $C = -2\sqrt{3} + 3 + (3 + \sqrt{3})\,i$

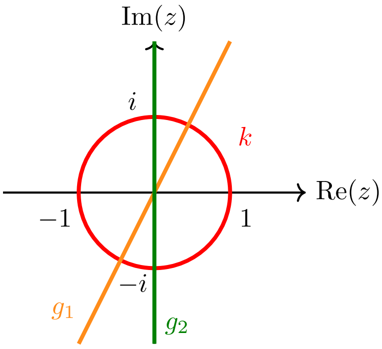
35. $-1.665 + 11.41i$

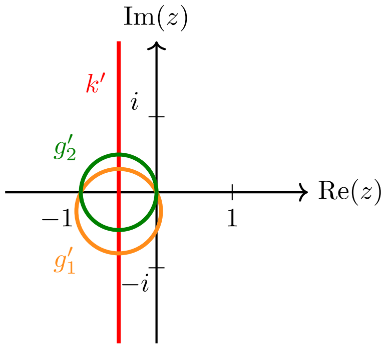
36. a) i, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i$
    b) Die Abbildungsgleichungen sind $u = x^2 - y^2 + 2xy + 1$ und $v = -x^2 + y^2 + 2xy$. Die Bildkurven: $v = -u + 1$ mit $v \leq 0$, $v = -u + 1$ mit $v \geq 0$, $v = u - 1$ mit $u \geq 1$ und $v \leq 0$

37. a) $w = \frac{2i}{z}$, k_1' : Gerade, k_2' : Kreis
    b) $w = \frac{1}{2iz+2}$, k_1' : Kreis, k_2' : Kreis

38. a) $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{cis}(157.5°)$, $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{cis}(337.5°)$
    b) Die Abbildungsgleichungen sind $u = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ und $u = \frac{-x-y}{x^2+y^2}$. Das Bild der imaginären Achse ist $v = u$.
    c) Kreis mit Mittelpunkt $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$ und Radius $\frac{\sqrt{2}}{2}$

39. Die Abbildungsgleichungen sind $u = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$ und $u = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$. Bild des Einheitskreises: $u = -\frac{1}{2}$, Bild der Geraden: $\left|w + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,i\right| = \frac{\sqrt{5}}{4}$, Bild der imaginären Achse: $\left|w + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$





6. Kapitel

1. Ja. Das neutrale Element ist die 0, zu jeder Zahl a gibt es ein inverses Element $-a$. Es gelten sowohl das Assoziativ-Gesetz wie auch das Kommutativ-Gesetz.

2. Ja. Das neutrale Element ist die 0, zu jeder Zahl a gibt es ein inverses Element $-a$. Es gelten sowohl das Assoziativ-Gesetz wie auch das Kommutativ-Gesetz.

3. Ja. Das neutrale Element ist die 1, zu jeder Zahl $a \neq 0$ gibt es ein inverses Element $\frac{1}{a}$. Es gelten sowohl das Assoziativ-Gesetz wie auch das Kommutativ-Gesetz. Für $a = 0$ gibt es keine inverses Element der Multiplikation.

4. Ja.

5. Nein. Schon die erste Bedingung ist nicht erfüllt: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist kein Vektor.

6. Die erste Bedingung ist erfüllt: Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist ein Vektor. Die zweite Bedingung gilt nicht, was man leicht geometrisch überlegen kann. Z. B. indem man als erste zwei Vektoren kollineare wählt und als dritten einen nicht dazu kollinearen. Die 3. Bedingung gilt auch nicht. Da das Vektorprodukt zweier Vektoren senkrecht zu beiden Vektoren steht, kann es kein neutrales Element geben.

7. Der Nachweis erfolgt durch Ausrechnen der beiden Seiten der Gleichung für drei komplexe Zahlen $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ und $z_3 = e + fi$.

8. Dazu musst du die beiden Matrizen S und D miteinander multiplizieren. Weshalb spielt es keine Rolle, ob du SD oder DS berechnest?

9. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

10. a) -1 b) 2 c) 2 d) $2 + 2i$

11. a) -1 b) $-2\sqrt{3} + 2\,i$ c) -1 d) stellt keine komplexe Zahl dar

12. Sie gibt das Quadrat des Betrags der komlexen Zahl z an.

13. Multipliziere diese Matrix von links und von rechts mit der Matrix $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Du erhältst beides mal das gleiche Ergebnis.

14. Multiplikation von A mit A^{-1} ergibt die Einheitsmatrix.

15. a) $-i$ b) $-i$ c) $-1 - i$

Literatur

[1] Joachim Engel, *Komplexe Zahlen und ebene Geometrie*, Oldenbourg Verlag München, 2009.

[2] Albert A. Gächter, *7 Zahlstocher, Anregungen für den Mathematikunterricht*, mefi-Verlag, 2013.