

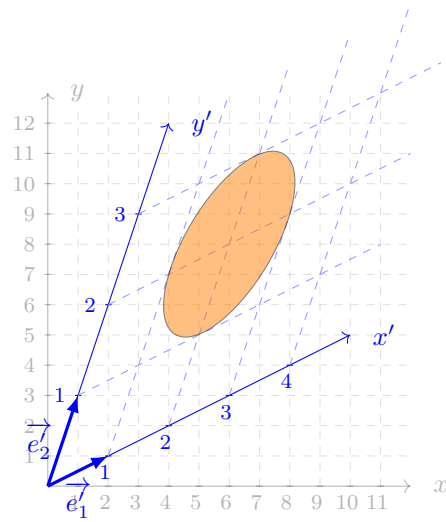
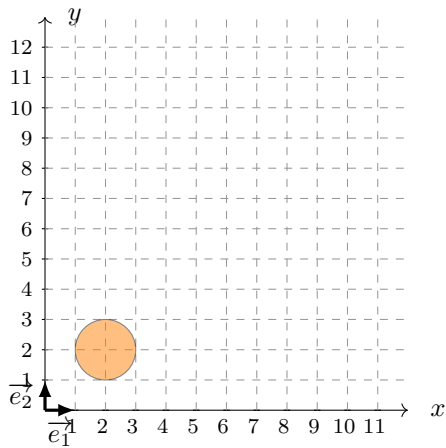


DMK
Deutschschweizerische Mathematikkommission

VSMK
Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte

Matrizen

Theorie und Aufgaben



$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Daniela Grawehr
Nima Moshayedi

Inhaltsverzeichnis

1	Rechnen mit Matrizen	1
1.1	Was ist eine Matrix?	1
1.2	Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einem Skalar	2
1.3	Matrizen in Anwendungen	3
1.3.1	Bestellmatrizen	3
1.3.2	Produktionsmatrizen	3
1.3.3	Übergangsmatrizen	4
1.4	Multiplikation mit einem Vektor	6
1.5	Multiplikation von Matrizen	7
1.6	Rechengesetze	10
1.7	Das Gauss-Verfahren	12
1.8	Inverse einer Matrix	16
2	Input-Output-Analyse, Leontief-Modell	20
3	Vermischte Aufgaben	23
4	Vektorräume	27
4.1	Definition und Beispiele	27
4.2	Basis und Dimension	28
4.3	Basiswechsel	29
4.4	Lineare Hülle	31
5	Abbildungen	32
5.1	Abbildungen mit Matrizen beschreiben	32
5.2	Umkehrung von Abbildungen	33
5.3	Verkettung von Abbildungen	34
5.4	Fixpunkte und Fixpunktgeraden	35
5.5	Spezielle Abbildungen	37
5.5.1	Rotationen	37
5.5.2	Spiegelungen	39
5.5.3	Projektionen	40
5.5.4	Lineare Abbildungen	43
6	Determinante	46
6.1	Berechnung der Determinante bei 2×2 -Matrizen	46
6.2	Zusammenhang zwischen Determinanten und Gleichungssystemen	49
6.3	Interpretation des Vorzeichens der Determinante bei Abbildungsmatrizen	50
6.4	Berechnung der Determinanten von $n \times n$ -Matrizen	50
6.5	Existenz der Determinante: Die Leibniz Formel	54
6.5.1	Die symmetrische Gruppe	54
6.5.2	Die Leibniz Formel	55
7	Eigenwerte und Eigenräume	57
7.1	Berechnung von Eigenwerten und Eigenraumbasen	57

7.2	Eigenwertbestimmung durch Iteration	61
7.3	Diagonalisierung einer Matrix	64
8	Vermischte Aufgaben	69
A	Matrizenrechnung in Octave	72
A.1	Erzeugung von Matrizen	72
A.2	Berechnungen mit Matrizen	73
A.3	Eigenwerte und Eigenräume	74
A.4	Spezielle Matrizen	74
A.5	Aufgaben	75
	Ergebnisse	77

Vorwort der Herausgeberin

«Die DMK setzt sich zur Aufgabe, den Mathematikunterricht an Mittelschulen zu fördern. Insbesondere trägt sie durch die Herausgabe von mathematischen Lehrmitteln [...] dazu bei, dass dieser Unterricht auf hohem Niveau stattfindet.»

Diesem Zitat aus dem Reglement der Deutschschweizerischen Mathematikkommission folgend hat die DMK in den vergangenen Jahren ihre Lehrmittel und Aufgabensammlungen für das Grundlagenfach zu den Themen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik überarbeitet und aktualisiert. Weiter gibt sie zwei Formelsammlungen heraus, welche in Zusammenarbeit mit der Deutschschweizerischen Physikkommission und der Deutschschweizerischen Chemiekommission aktuell gehalten werden.

Da es für das Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik oder das Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik keine oder nur wenige geeignete Lehrmittel gibt, gehört es zum Alltag der Lehrpersonen dieser Fächer, die Unterrichtsmaterialien in Eigenregie zu erarbeiten. Aus diesem Grund hat sich die DMK vorgenommen in den kommenden Jahren Unterrichtsmaterialien zu verbreiteten Inhalten des Schwerpunkt- und Ergänzungsfachs herauszugeben und diese zur Verfügung zu stellen. Da wir den Markt für diese Unterrichtsmaterialien als klein einschätzen, haben wir uns entschieden auf eine Veröffentlichung in Form von Büchern oder gedruckten Broschüren zu verzichten. Die so entstandenen «Themenhefte» sollen von der Homepage der DMK heruntergeladen werden und im Unterricht eingesetzt werden können. Die Benutzerinnen und Benutzer möchten wir auffordern, die durch die Autorinnen und Autoren geleistete Arbeit zu respektieren und mit der Bezahlung eines Honorars dazu beizutragen, dass weitere solche «Themenhefte» entstehen können. Informationen zur Bezahlung und auch die Datei zum Download findet man auf der Website der DMK: dmk.vsmv.ch

Den Anfang in der Reihe bildete das Themenheft «Komplexe Zahlen und Funktionen». Weiter geht es nun mit dem vorliegenden Themenheft zu Matrizen. Ein grosses Dankeschön geht von Seiten der DMK an Daniela Grawehr und Nima Moshayedi für ihren grossen Einsatz, ihre Autorenschaft und den Satz. Ebenfalls bedanken möchten wir uns bei Prof. Thomas P. Wihler und dem Haupt Verlag für die Erlaubnis, das Kapitel «Eigenwertbestimmung durch Iteration» aus seinem Buch «Mathematik für Naturwissenschaften: Einführung in die lineare Algebra» im Themenheft zu integrieren. Weiter möchten wir uns bei Heinz Klemenz für seine wertvollen Anregungen in der Anfangsphase des Projekts bedanken sowie bei Maria Rupflin für das sorgfältige und umsichtige Korrekturlesen. Und ein spezielles Dankeschön geht natürlich an Michael Anderegg aus der DMK für die Projektleitung.

Für die Deutschschweizerische Mathematikkommission
 Andrea Peter, Präsidentin

Einleitende Bemerkungen zu diesem Themenheft

Die Ihnen vorliegende Themenheft ist für den gymnasialen Unterricht im Schwerpunkt- oder Ergänzungsfach konzipiert. Das Ziel war es, die Matrizenrechnung von ihren zahlreichen Anwendungen her zu motivieren. Es ist vom Inhalt her absichtlich breit ausgelegt und die Lehrerinnen und Lehrer müssen eine geeignete Auswahl treffen.

Das Material ist in zwei Teile aufgeteilt. Will man nur einen kleinen Einblick in das Thema gewähren, empfehlen sich Kapitel 1-3, in denen die Grundlagen des Rechnens mit Matrizen gelegt werden. Hier kann Kapitel 1.7 weggelassen werden, wenn die Schüler Gleichungssysteme sicher lösen. Kapitel 5-8 beschäftigen sich mit Abbildungen, Determinanten und Eigenvektoren. Jeweils am Ende eines solchen Teils gibt es «Vermischte Aufgaben» (Kap. 3 und 8), die es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, den Inhalt anhand von Aufgaben vertieft zu üben oder sie können der Lehrperson auch als Pool für weitere Aufgaben dienen.

Numerische Methoden nehmen an Bedeutung zu und somit bietet es sich an, bei der Matrizenrechnung mit Octave zu arbeiten. Der Anhang gibt einen Überblick über die Octave-Syntax, die für die Matrizenrechnung notwendig ist. Für das Kapitel 7.2 empfiehlt es sich, dass die Schülerinnen und Schüler diese Syntax bereits beherrschen und ein wenig Programmiererfahrung haben. Im Themenheft gibt es einige Unterkapitel, welche, ohne den roten Faden zu verlieren, durchaus weggelassen werden können, dies sind Kapitel 4, 5.4, 5.5, 6.5, 7.2 und 7.3. Die Lösungen der Aufgaben befinden sich nach Kapiteln geordnet am Ende des Themenhefts.

Das Material ist aus einem Unterrichtsskript entstanden und hat sich über die Jahre hinweg entwickelt. Wir danken den Schülerinnen und Schülern, die mit grosser Begeisterung Fehler gesucht haben und mit hilfreichen Ideen zur Verbesserung dieses Themenheftes beigetragen haben.

Jede Rückmeldung zu diesem Lehrmittel ist sehr willkommen, sei es ein Hinweis auf Fehler, die sich eingeschlichen haben, sei es ein Lob oder eine Kritik oder spannende Ideen, die man in zukünftige Versionen einarbeiten könnte.

Daniela Grawehr
Nima Moshayedi

1 Rechnen mit Matrizen

1.1 Was ist eine Matrix?

1. Das Zentrallager einer Möbelhauskette will an seine Filialen in Bern, Luzern, Aarau und Zürich jeweils fünf verschiedene Stuhl-Modelle liefern. Der Lieferumfang für den Monat Januar wird durch folgende Tabelle beschrieben.

	Modell A	Modell B	Modell C	Modell D	Modell E
Bern	150	200	300	100	100
Luzern	200	250	350	150	100
Aarau	150	220	250	100	120
Zürich	250	150	300	150	180

- Wie viele Stühle werden insgesamt im Januar nach Aarau geliefert?
- Welches Modell wird im Januar am häufigsten ausgeliefert?
- In den Monaten Februar bis November werden an alle Filialen jeden Monat gleich viele Stühle wie im Januar geliefert. Erstelle eine Tabelle, die den Lieferumfang für die ersten 11 Monate des Jahres beschreibt.
- Wegen des Weihnachtsverkaufs werden die Filialen im Dezember mit mehr Produkten beliefert. In der folgenden Tabelle sind die Lieferzahlen für den Monat Dezember ersichtlich. Berechne den gesamten Lieferumfang für November und Dezember.

	Modell A	Modell B	Modell C	Modell D	Modell E
Bern	200	350	400	150	150
Luzern	250	300	200	150	150
Aarau	175	250	250	150	150
Zürich	300	250	350	175	200

Tabellen als Matrizen darstellen

Lässt man die Spalten- und Zeilenbezeichnungen weg, reduziert sich eine Tabelle auf eine Anordnung von Zahlen.

$$\begin{pmatrix} 200 & 350 & 400 & 150 & 150 \\ 250 & 300 & 200 & 150 & 150 \\ 175 & 250 & 250 & 150 & 150 \\ 300 & 250 & 350 & 175 & 200 \end{pmatrix}$$

$m \times n$ -Matrix

Ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten nennt man eine $m \times n$ -**Matrix**.

Matrizen werden gewöhnlich mit Grossbuchstaben A, B, C, \dots bezeichnet.

Die einzelnen Einträge (a_{ij}) ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) im Schema heissen auch **Komponenten** der Matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ heisst die **Grösse** der Matrix A .

Eine Matrix heisst **quadratisch**, falls sie gleich viele Spalten wie Zeilen hat, d.h. $m = n$ gilt.

2. Notiere die 3×4 -Matrix, für die gilt: $a_{12} = 4$, $a_{22} = 2$, $a_{31} = 6$, $a_{14} = 8$, $a_{23} = 1$ und $a_{ij} = 0$ sonst.
3. Notiere eine $m \times n$ -Matrix (a_{ij}) mit folgenden Vorgaben:

- | | |
|---|--|
| a) $m = n = 3$,
$a_{ij} = 1$ für $i = j$, $a_{ij} = 0$ sonst | b) $m = 4$, $n = 3$,
$a_{ij} = i - j$ |
| c) $m = 3$, $n = 5$,
$a_{ij} = i \cdot j$ | d) $m = 4$, $n = 4$,
$a_{ij} = i^2 + j^2$ |

1.2 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einem Skalar

In Aufgabe 1 haben wir gesehen, dass man zwei Zahlentabellen addieren (Teilaufgabe c)) oder eine ganze Tabelle mit einer Zahl multiplizieren kann (Teilaufgabe b)).

Addieren und Subtrahieren von Matrizen

Zwei Matrizen A und B können addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sie gleich viele Spalten und Zeilen (gleiche Grösse) haben. Man addiert bzw. subtrahiert dann jeweils die Elemente, welche an der gleichen Stelle stehen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

$A + B$ heisst die **Summe**, $A - B$ heisst die **Differenz** der Matrizen A und B .

Multiplikation mit einem Skalar

Eine Matrix A wird mit einem Skalar k multipliziert, in dem man jedes Element in der Matrix mit diesem Skalar multipliziert.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$k \cdot A$ heisst das **k -fache** der Matrix A und kann auch als kA geschrieben werden.

4. Die Matrizen A , B , und C sind folgendermassen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Berechne:

a) $A + B$ b) $B - A$ c) $\frac{5}{2}C$ d) $3A - \frac{1}{3}B$

5. Zeige, dass für zwei Matrizen A , B der gleichen Grösse allgemein gilt:

$$2A + 2B = 2(A + B) = 2(B + A)$$

6. Begründe: Für die Addition von Matrizen und die Multiplikation mit einem Skalar gelten die üblichen Rechengesetze.

a) $A + B = B + A$ b) $A + (B + C) = (A + B) + C$
 c) $s(tA) = (st)A$ d) $t(A \pm B) = tA \pm tB$

1.3 Matrizen in Anwendungen

1.3.1 Bestellmatrizen

Eine Bestellmatrix haben wir bereits in Aufgabe 1 gesehen. Bestellmatrizen geben an, wie viel ein Kunde (Zeilen-Namen) von einem bestimmten Produkt (Spalten-Namen) bestellt.

Es ist empfehlenswert, die Zeilen und Spalten anzuschreiben. Bei der behandelten Aufgabe sieht das dann so aus:

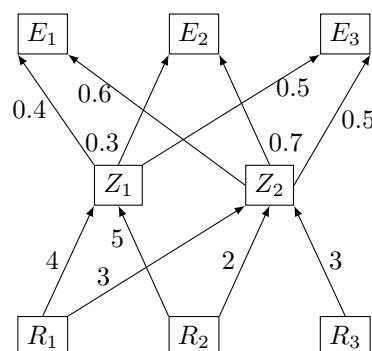
$$\begin{array}{c} \\ B \\ L \\ A \\ Z \end{array} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ \left(\begin{array}{ccccc} 150 & 200 & 300 & 100 & 100 \\ 200 & 2500 & 350 & 150 & 100 \\ 150 & 220 & 250 & 100 & 120 \\ 250 & 150 & 300 & 150 & 180 \end{array} \right) \end{array}$$

1.3.2 Produktionsmatrizen

7. Mehrstufiger Produktionsprozess

Ein Joghurthersteller stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den drei Rohstoffen R_1 , R_2 , R_3 zwei Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 her, aus denen dann drei Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 hergestellt werden.

Man kann den jeweiligen Materialbedarf durch das folgende Diagramm beschreiben. Dabei geben die Zahlen an den Pfeilen an, wie viele Tonnen jeweils für eine Tonne des entstehenden Produktes verarbeitet werden, z.B. werden 4 Tonnen R_1 und 5 Tonnen R_2 für eine Tonne Z_1 benötigt.

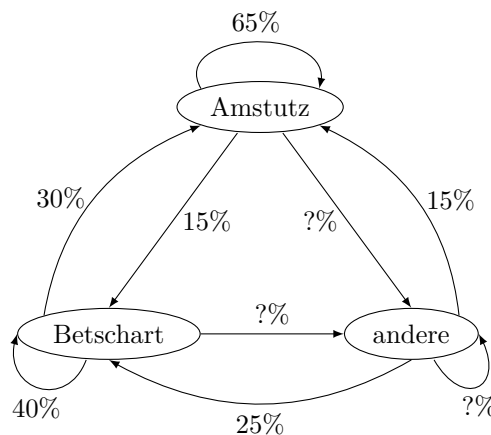


- a) Beschreibe den Materialbedarf zwischen den Rohstoffen und Zwischenprodukten durch eine Matrix.
 b) Beschreibe den Materialbedarf zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten durch eine Matrix.
8. Die folgende Produktionsmatrix ist gegeben. Zeichne das Produktionsdiagramm.

$$\begin{array}{c} E_1 \quad E_2 \quad E_3 \\ R_1 \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\ R_2 \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.3.3 Übergangsmatrizen

9. Das Käuferverhalten bei zwei grossen konkurrierenden Velohändlern wurde mit Marktanalysen beobachtet. Dabei wurde Folgendes festgestellt:
 65% derjenigen Personen, die bereits ihr letztes Velo bei Amstutz gekauft haben, kaufen auch ihr nächstes Velo bei diesem Händler.
 15% der bisherigen Kunden von Amstutz wechseln beim Kauf ihres nächsten Velos zum Konkurrenten Betschart. Der Rest der Kunden, wechselt zu einem anderen Velohändler.
 Beim Händler Betschart kaufen 40% der bisherigen Kunden auch ihr neues Velo, aber 30% wechseln zu Amstutz für den Kauf ihres neuen Velos.
 Von anderen Velohändlern entscheiden sich beim Kauf eines neuen Velos 15% für Amstutz und 25% für Betschart. Das Wechselverhalten ist in folgendem Übergangsgraph festgehalten.



- a) Ergänze im Diagramm die fehlenden Werte.
 b) Das Wechselverhalten der Käufer lässt sich mit Hilfe einer Übergangsmatrix darstellen.

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad X \\ A \begin{pmatrix} 0.65 & 0.30 & 0.15 \end{pmatrix} \\ B \begin{pmatrix} \dots & 0.40 & 0.25 \end{pmatrix} \\ X \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

Ergänze die fehlenden Werte.

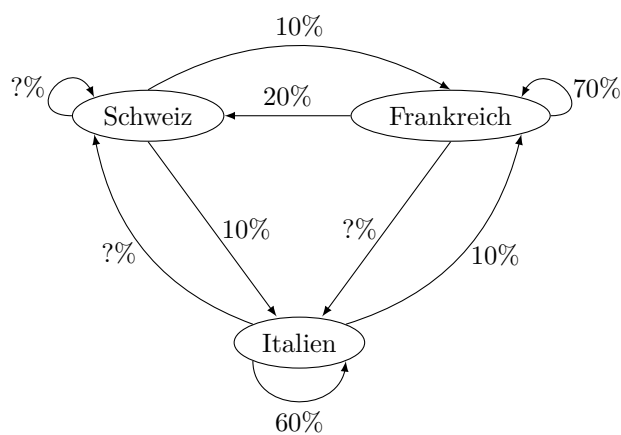
- c) Was gibt allgemein das Element a_{ij} an?
 d) Was lässt sich über die Spaltensummen sagen?

Übergangsmatrix

Übergangsmatrizen beschreiben das Wechselverhalten zwischen zwei Zuständen.

$$\begin{array}{c}
 A \\
 B \\
 \vdots \\
 X
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 \text{bleibt bei } A & \text{von } B \text{ nach } A & \dots & \text{von } X \text{ nach } A \\
 \text{von } A \text{ nach } B & \text{bleibt bei } B & \dots & \text{von } X \text{ nach } B \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \text{von } A \text{ nach } X & \text{von } B \text{ nach } X & \dots & \text{bleibt bei } X
 \end{pmatrix}$$

10. In den Schweizer Alpen wird im Grenzgebiet Schweiz-Frankreich-Italien eine bestimmte Art Wildtiere ausgesetzt. Zu Beginn befinden sich alle Tiere in der Schweiz. Der folgende Übergangsgraph zeigt die prozentuale Veränderung der Population in den drei Ländern von Jahr zu Jahr.



- a) Trage die fehlenden Zahlen in den Graphen ein.
 b) Erstelle die Übergangsmatrix.
11. Die folgende Übergangsmatrix ist gegeben.

$$\begin{array}{c}
 A \\
 B \\
 C \\
 D
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0.3 & 0.2 & 0.2 & \\
 0.3 & & 0.3 & 0.1 \\
 0.3 & 0.1 & & 0.4 \\
 & 0 & 0.1 & 0.5
 \end{pmatrix}$$

- a) Ergänze die fehlenden Werte in der Matrix.
 b) Erstelle den Übergangsgraphen.

1.4 Multiplikation mit einem Vektor

12. Fritz hat beschlossen, Geld zu verdienen, indem er selbst gebackene Muffins an Privathaushalte liefert. Bei ihm kann man die Geschmacksrichtungen Schokolade, Himbeer, Heidelbeer, Apfel und Haselnuss bestellen. Um die Grundzutaten Mehl, Eier, Zucker und Butter möglichst effektiv für beliebige Bestellungen einkaufen zu können, hat er eine Tabelle erstellt, in der angegeben ist, wie viel der Zutaten für einen Muffin der jeweiligen Sorte benötigt wird.

	Schokolade	Himbeer	Heidelbeer	Apfel	Haselnuss
Mehl (in g)	22	33	25	33	22
Eier	0	0.3	0.2	0.2	0.2
Zucker (in g)	19	22	17	20	25
Butter (in g)	5	10	10	12	15

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 33 & 25 & 33 & 22 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 19 & 22 & 17 & 20 & 25 \\ 5 & 10 & 10 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Die erste Bestellung ist für einen Kindergeburtstag:

Schokolade: 15 Stück
 Himbeer: 10 Stück
 Heidelbeer: 12 Stück
 Apfel: 8 Stück
 Haselnuss: 5 Stück

Wir können diese Bestellung als Auftragsvektor schreiben:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 12 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechne, wie viel der Zutaten für diese Bestellung eingekauft werden müssen. Beschreibe den Lösungsweg. Schreibe das Ergebnis als Vektor.

Multiplikation von einer Matrix mit einem Vektor

Es sei A eine $n \times m$ -Matrix und \vec{b} ein Vektor mit m Komponenten. Das Ergebnis der Matrix-Vektor-Multiplikation $A \cdot \vec{b}$ ist dann wieder ein Vektor, dessen Komponenten durch komponentenweise Multiplikation und Summation der Einträge der entsprechenden Zeile der Matrix mit den Komponenten des Ausgangsvektors ermittelt werden.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Man kann die Einträge der Matrix und Komponenten des Vektors zum einfacheren Multiplizieren auch in ein Schema schreiben:

			1			0			4
3	2	1	3·1	+	2·0	+	1·4	=	7
1	0	2	1·1	+	0·0	+	2·4	=	9

13. Berechne:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

14. In einem Landwirtschaftshandel gibt es zwei verschiedene Sorten Dünger. Beide Sorten bestehen aus Stickstoff (N), Kaliumoxid (K_2O) und Calciumoxid (CaO). Die folgende Tabelle gibt die Anteile an.

	X	Y
N	0.4	0.3
K_2O	0.4	0.2
CaO	0.2	0.5

Ein Kunde bestellt 20t von Düngersorte X und 5t von Düngersorte Y.
Notiere die Berechnung in Matrixschreibweise und rechne aus.

1.5 Multiplikation von Matrizen

15. Wir verwenden die Matrix der Zutatenmengen A aus Aufgabe 12.

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 33 & 25 & 33 & 22 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 19 & 22 & 17 & 20 & 25 \\ 5 & 10 & 10 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Hiermit sollen nun folgende Bestellungen bearbeitet werden:

	Kunde X	Kunde Y	Kunde Z
Schokolade	15	3	4
Himbeer	10	4	12
Heidelbeer	12	2	5
Apfel	8	1	4
Haselnuss	5	1	8

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 4 \\ 10 & 4 & 12 \\ 12 & 2 & 5 \\ 8 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Da die einzelnen Bestellungen durch drei unterschiedliche Backteams bearbeitet werden, braucht Fritz nun die Zutatenmengen für jeden einzelnen Auftrag.

Berechne für die einzelnen Aufträge die Anzahl der jeweils erforderlichen Mengen der Zutaten.

Beschreibe den Lösungsweg.

Schreibe das Ergebnis als Matrix.

Multiplikation von Matrizen

Gegeben sind eine $l \times m$ -Matrix $A = (a_{ij})$ und eine $m \times n$ -Matrix $B = (b_{jk})$.

Dann ist das Produkt $C = A \cdot B$ der beiden Matrizen A und B als eine $l \times n$ -Matrix $C = (c_{ik})$ definiert, deren Elemente man so erhält:

Jedes Element c_{ik} von C berechnet man als Skalarprodukt des i -ten Zeilenvektors der Matrix A mit dem k -ten Spaltenvektor der Matrix B .

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 12 & -6 & 10 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 12 & -6 & 10 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 8 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 5 \cdot 3 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 12 & -6 & 10 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -2 & -6 \\ 10 & -8 & 34 \end{pmatrix}$$

Man kann die Einträge der Matrizen folgendermassen in ein Schema schreiben:

(genannt Falk-Schema, benannt nach Sigurd Falk, Professor an der TU Braunschweig)

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & C \end{array}, \text{ also: } \begin{array}{cccc|ccc} & & & & 8 & -2 & -1 \\ & & & & 0 & 3 & 4 \\ & & & & 12 & -6 & 10 \\ & & & & 3 & 1 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 5 & 31 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 3 & 2 & 10 & -8 & 34 \end{array}$$

16.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & -4 & -6 \\ 3 & 7 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } (3 \quad -5 \quad 7) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 12 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot (3 \quad -5 \quad 7)$$

17. Bestellmatrizen

Das folgende Gartenhaus wird in Baumärkten angeboten ¹.



¹Wir danken Tene Schweiz, dass sie uns das Foto zur Verfügung gestellt haben. Das Gartenhaus ist unter <https://tene-schweiz.ch/Gartenhaus-Capri-Premium-44mm-inkl-Terrasse> zu finden.

Das Gartenhaus wird aus verschiedenen Modulen zusammengesetzt. Ausgehend von diesen Modulen bietet der Hersteller verschiedene Gartenhausmodelle an.

	Modell classic	Modell kompakt	Modell premium	Modell deluxe
Wand (inkl. 1 Tür)	4	4	4	4
Dach (Überstand 20cm)	1	1	0	0
Dach (Überstand 200cm)	0	0	1	1
Fenster	0	1	1	2
Holzboden	0	1	1	1
Terrasse	0	0	0	1

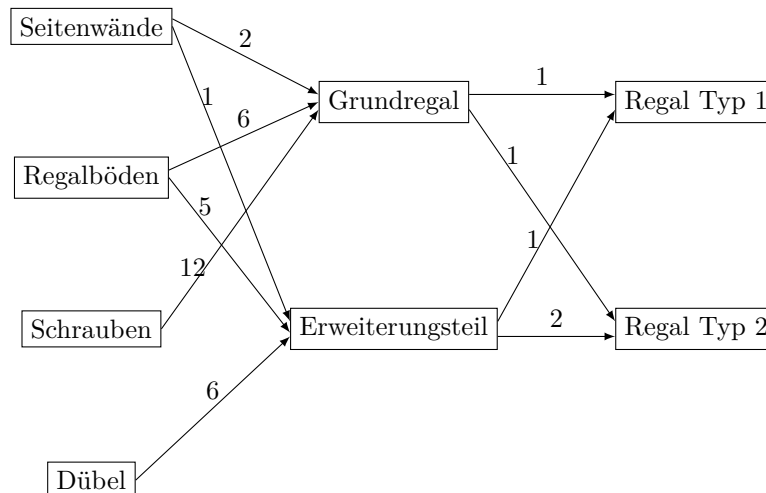
- a) Eine Baumarktkette im Kanton Bern bestellt 30-mal classic, 45-mal kompakt, 60-mal premium und 50-mal deluxe. Bestimme, wie viele der jeweiligen Module geliefert werden müssen.
 b) In drei verschiedenen Kantonen werden Bestellungen aufgegeben.

	Kanton A	Kanton B	Kanton C
classic	25	20	0
kompakt	12	30	35
premium	0	10	20
deluxe	3	12	40

Berechne, wie viele der jeweiligen Module an jeden Kanton geliefert werden müssen mithilfe der Matrizenrechnung.

18. Produktionsmatrizen

Das folgende Diagramm beschreibt den Produktionsprozess von zwei Regalen der Typen 1 und 2.



- a) Wie viele Zwischenprodukte jeder Sorte (Grundregal, Erweiterungsteil) benötigt man, um eine Bestellung von Endprodukten (Regal Typ 1 und 2) zu erfüllen? Schreibe die Produktionsmatrix hierzu auf.
 b) Wie viele Rohstoffe jeder Sorte (Seitenwände, Regalböden, Schrauben und Dübel) sind für die Herstellung einer bestimmten Anzahl von Zwischenprodukten nötig? Schreibe die Produktionsmatrix hierzu auf.
 c) Schreibe die Produktionsmatrix für den gesamten Produktionsprozess auf.
 d) Wie viele Stück der 4 Grundstoffe benötigt man, um 8 Regale vom Typ 1 und 12 Regale vom Typ 2 herzustellen?

19. Übergangsmatrizen

Der Markt von Tablet-PCs wird im einem fiktiven Staat von drei Herstellern A , S und M beherrscht. Marktforschungen haben ergeben, dass das Wechselverhalten von Kunden von einem Jahr zum nächsten durch folgende Übergangsmatrix beschrieben wird.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ S \\ M \end{array} \begin{array}{ccc} A & S & M \\ \left(\begin{array}{ccc} x & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & y & 0.2 \\ 0.15 & 0.2 & z \end{array} \right) \end{array}$$

Das bedeutet also z.B. dass 30% der Kunden des Herstellers M zum Hersteller A wechseln.

- a) Berechne die fehlenden Werte x, y, z in der Matrix.
 b) Dieses Jahr sieht die Kundenverteilung so aus

A : 5 Mio.

B : 3 Mio.

C : 2 Mio.

Wie viele Kunden hätten die Hersteller in 3 Jahren, wenn man annimmt, dass das Übergangsverhalten in den kommenden 3 Jahren gleich bleibt?

1.6 Rechengesetze

Für die reellen Zahlen gelten die folgenden Rechengesetze ($a, b \in \mathbb{R}$):

Kommutativgesetz: $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Distributivgesetz: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Wir überprüfen nun, ob diese Gesetze auch für das Rechnen mit Matrizen gelten.

Dass das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz für die Addition von Matrizen gelten, wurde in Aufgabe 6 bereits gezeigt. Gelten diese Gesetze aber auch für die Multiplikation?

20. Untersuchung des Kommutativgesetzes für die Multiplikation von Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Gilt das Kommutativgesetz?

Untersuchung des Assoziativgesetzes für die Multiplikation von Matrizen

Wir betrachten einen zweistufigen Produktionsprozess.

Im ersten Schritt der Produktion werden aus den Rohstoffen R_1 und R_2 und R_3 zwei Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 hergestellt. Die Verbrauchsmengen werden durch die Matrix A beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

In der zweiten Produktionsstufe werden aus den zwei Zwischenprodukten drei Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 hergestellt. Die Verbrauchsmengen werden durch die Matrix B beschrieben:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Es haben drei Kunden Bestellungen für Endprodukte aufgegeben. Diese sind in der Bestellmatrix C ausgewiesen:

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 10 \\ 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rohstoffverbrauch für die Kundenbestellungen kann auf zwei Arten ausgerechnet werden. Es wird schnell klar, dass beide Wege zum gleichen Ziel führen.

1. Weg: Zuerst werden jeweils die Rohstoffmengen ausgerechnet, die für die Produktion eines Endprodukts E_1 und E_2 benötigt werden und dann diese mit der Bestellmatrix multipliziert.

Rohstoffmengen für jeweils ein Endprodukt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Danach verarbeiten wir die Bestellungen:

$$(A \cdot B) \cdot C = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 10 \\ 50 & 0 \end{pmatrix}$$

Auf beiden Wegen haben wir den Rohstoffverbrauch für die Kundenbestellungen berechnet. Das Ergebnis muss vom Rechenweg unabhängig sein. Ohne die Produkte jetzt konkret auszurechnen, können wir somit festhalten, dass beide Ergebnisse übereinstimmen müssen.

Es muss also unabhängig von den konkreten Zahlen das Assoziativgesetz gelten:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

21. Führe die Rechnung für den soeben vorgestellten Fall $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ durch.

Es gilt allgemein (ohne Beweis):

Gesetze für die Multiplikation von Matrizen

Für Matrizen A, B, C gilt stets:

$$\text{Assoziativgesetz: } (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$\text{Distributivgesetz: } (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Im Allgemeinen gilt das Kommutativgesetz nicht, d.h. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

22. Berechne möglichst einfach unter der Verwendung der Rechengesetze für Matrizen.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} & \text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

1.7 Das Gauss-Verfahren

Das *Gauss-Verfahren*² ist ein Verfahren³, um lineare Gleichungssysteme beliebiger Ordnung zu lösen. Das Prinzip basiert darauf, dass wir die Lösungsmenge eines Gleichungssystems nicht verändern, wenn wir

- eine Gleichung mit dem Vielfachen von sich selbst ersetzen
- eine Gleichung durch die Summe von sich selbst und einer anderen Gleichung ersetzen.

Wenn wir diese beiden Aspekte kombinieren, sehen wir, dass sich nichts ändert, wenn man eine Gleichung durch die Summe von einem Vielfachen von sich selbst und einem Vielfachen einer anderen Gleichung ersetzt.

Das Gauss-Verfahren basiert nun darauf, bei einem Gleichungssystem das vorherige Prinzip zu nutzen, um eine Variable nach der anderen zu *eliminieren*, damit wir eine sogenannte *Zeilen-Stufen-Form* bekommen. Betrachte ein allgemeines $n \times n$ System mit $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

wobei $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ für alle $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ist. Hier haben wir n Variablen x_1, x_2, \dots, x_n , die gesucht sind. Bei der Zeilen-Stufen-Form wollen wir das Gleichungssystem auf die Form

$$\begin{aligned} c_{11}x_{\sigma(1)} + c_{12}x_{\sigma(2)} + c_{13}x_{\sigma(3)} + \dots + c_{1n}x_{\sigma(n)} &= d_1 \\ c_{22}x_{\sigma(2)} + c_{23}x_{\sigma(3)} + \dots + c_{2n}x_{\sigma(n)} &= d_2 \\ c_{33}x_{\sigma(3)} + \dots + c_{3n}x_{\sigma(n)} &= d_3 \\ &\vdots \\ c_{nn}x_{\sigma(n)} &= d_n \end{aligned}$$

bringen, wobei $c_{ij}, d_k \in \mathbb{R}$ für alle $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\sigma(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Wir schreiben hier den Index als $\sigma(i)$ bei der Variablen, da wir zum Ausdruck bringen möchten, dass nicht zwingend x_1 die erste Variable bei der ersten Gleichung sein muss. Dasselbe gilt für die restlichen Variablen. Dies ist klar, da es nichts ändert wenn wir z.B. $x + y = 2$ oder $y + x = 2$ schreiben. Das bedeutet, dass es frei ist zu wählen, welche Variablen man in welcher Reihenfolge eliminieren möchte. Praktisch, sollte man immer die einfachste Situation wählen. Wenn wir dann die Zeilen-Stufen-Form erreicht haben, können wir die letzte Gleichung lösen und rückwärts einsetzen.

Beispiel: Additionsverfahren

Das Additionsverfahren kann man auch mit dem Gauss-Verfahren erklären. Betrachte das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -4 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

Hier können wir uns entscheiden einfachheitshalber die Variable y zu eliminieren. Wir machen nun die folgenden Ersetzungen:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -4 & |I := I \\ 3x + y &= 5 & |II := 3II \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -4 \\ 9x + 3y &= 15 \end{aligned}$$

²benannt nach dem berühmten Mathematiker *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855).

³Das Gauss-Verfahren wird oft auch *Eliminationsverfahren* genannt.

Nun können wir die beiden Gleichung addieren und bekommen also

$$2x + 9x - 3y + 3y = -4 + 15$$

Somit erhalten wir

$$11x = 11$$

und damit

$$x = 1$$

Setzen wir x in die Gleichung $3x + y = 5$ ein, bekommen wir

$$y = 2$$

Damit ergibt sich die Lösungsmenge

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1, 2)\}}}$$

Das Additionsverfahren kann auch für Gleichungssysteme höherer Ordnung benutzt werden, wobei dies, wie bereits gesagt, eigentlich nur das Gauss-Verfahren darstellt. └

Beispiel

Betrachte das folgende 3×3 System:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 6 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -5 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen hier die Variablen mit x_1, x_2, x_3 so wie vorhin, anstatt mit x, y, z .

Wir machen nun die folgenden Ersetzungen:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 6 & | \text{I} := \text{I} \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -5 & | \text{II} := \text{II} + \frac{2}{3}\text{I} \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 6 & | \text{III} := \text{III} - \frac{2}{3}\text{I} \end{aligned}$$

Somit bekommen wir

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 6 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -1 \\ \frac{2}{3}x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Nun können wir aus der letzten Gleichung x_3 bestimmen. Wir bekommen somit

$$x_3 = 3$$

Dies können wir nun in die zweite Gleichung einsetzen und somit x_2 berechnen. Wir bekommen

$$x_2 = -1 - \frac{1}{3} \cdot 3 = -2$$

Schliesslich, durch Einsetzen in die erste Gleichung, bekommen wir

$$x_1 = \frac{1}{3} (6 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3) = 4$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(4, -2, 3)\}}}$$

Beispiel

Betrachte das folgende 3×3 System:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Wir machen nun die folgenden Ersetzungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 & | \text{I} := \text{I} \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 & | \text{II} := \text{II} - \frac{1}{2}\text{I} \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 & | \text{III} := \text{III} + \frac{1}{2}\text{I} \end{aligned}$$

Somit bekommen wir

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -\frac{3}{2}x_2 + 2x_3 &= 0 \\ \frac{3}{2}x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt machen wir die folgenden Ersetzungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 & | \text{I} := \text{I} \\ -\frac{3}{2}x_2 + 2x_3 &= 0 & | \text{II} := \text{II} \\ \frac{3}{2}x_2 + 4x_3 &= 0 & | \text{III} := \text{III} + \text{II} \end{aligned}$$

Somit bekommen wir

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -\frac{3}{2}x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Durch die letzte Gleichung bekommen wir

$$x_3 = 0$$

Wenn wir dies in die zweite Gleichung einsetzen, bekommen wir $-\frac{3}{2}x_2 = 0$ und somit

$$x_2 = 0$$

Schliesslich, wenn wir x_2 und x_3 in die erste Gleichung einsetzen, bekommen wir $2x_1 = 2 + 0 - 2 \cdot 0 = 2$ und somit

$$x_1 = 1$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(1, 0, 0)\}}}$$

—

Beispiel

Betrachte das folgende 3×3 System:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Wir machen nun folgende Ersetzungen:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 & |I := I \\-x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 & |II := II + I \\3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 & |III := III - 3I\end{aligned}$$

Somit bekommen wir

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\3x_2 + 7x_3 &= 5 \\-5x_2 - 14x_3 &= 0\end{aligned}$$

Als nächstes machen wir folgende Ersetzungen:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 & |I := I \\3x_2 + 7x_3 &= 5 & |II := II \\-5x_2 - 14x_3 &= 0 & |III := III + \frac{5}{3}II\end{aligned}$$

Somit bekommen wir

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\3x_2 + 7x_3 &= 5 \\-\frac{7}{3}x_3 &= \frac{25}{3}\end{aligned}$$

Mit der letzten Gleichung bekommen wir nun

$$x_3 = -\frac{25}{7}$$

Wenn wir dies in die zweite Gleichung einsetzen, bekommen wir

$$3x_2 = 5 + 25 = 30$$

und somit

$$x_2 = 10$$

Setzen wir x_2 und x_3 in die erste Gleichung ein, bekommen wir

$$x_1 = 1 - 2 \cdot 10 - 4 \cdot \left(-\frac{25}{7}\right) = -\frac{33}{7}$$

Damit ergibt sich die Lösungsmenge

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left(-\frac{33}{7}, 10, -\frac{25}{7} \right) \right\}}}$$

└

23. Berechne mit dem Gauss-Verfahren die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme

a)

$$\begin{aligned}-2x + 5y &= 19 \\3x - 4y &= -18\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}3x - 2y &= 7 \\x + 2y &= 5\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}3x_1 - 2x_2 + 8x_3 &= -13 \\4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 14 \\-5x_1 - x_2 - 7x_3 &= 9\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}4x_1 + 9x_2 + 5x_3 &= 13 \\-5x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 17 \\6x_1 + 3x_2 - 10x_3 &= 23\end{aligned}$$

1.8 Inverse einer Matrix

24. In einer Stadt gibt es zwei Tageszeitungen, der Seebote (S) und das Tagblatt (T), die zusammen 10'000 Abonnenten haben. Zum neuen Jahr werden dies 4120 Kunden des Seeboten und 5'880 des Tagblatts sein. Man nimmt an, dass das Wechselverhalten der Abonnenten am Ende des Jahres durch folgende Matrix gegeben ist:

$$M = \begin{array}{c} S \quad T \\ \begin{array}{cc} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{array} \end{array}$$

Wie war die Kundenverteilung vor dem Jahreswechsel?

Koeffizientenmatrix

Wenn man ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

gegeben haben, können wir dieses mithilfe einer Matrix A schreiben. Dazu definieren wir die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nun bemerken wir, dass das Gleichungssystem mithilfe der folgenden Matrixmultiplikation entsteht

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

falls die Matrix A als *Koeffizientenmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Die *erweiterte Koeffizientenmatrix* bezieht direkt die b_1, \dots, b_n mit in die Matrix ein damit die Umformungen beim Gauss-Verfahren einfacher mithilfe einer Matrix darstellbar sind.

Wir schreiben dann

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

Ein lineares Gleichungssystem kann man dann immer direkt mithilfe der erweiterten Koeffizientenmatrix beschreiben.

25. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - y + z &= 6 \\ 4x + 2y + z &= 3 \\ 9x + 3y + z &= 6 \end{aligned}$$

- a) Löse das Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren.
- b) Schreibe das Gleichungssystem als Produkt einer Matrix und dem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- c) Löse das Gleichungssystem noch einmal, indem du die erweiterte Koeffizientenmatrix aufschreibst und solange umformst, bis du auf der linken Seite die Einheitsmatrix stehen hast.

Das Inverse einer Matrix

Gilt für zwei quadratische Matrizen A und B die Bedingung $A \cdot B = B \cdot A = E$, wobei E die **Einheitsmatrix** ist, d.h. die Matrix mit nur Einsen auf der Diagonalen und sonst Nullen, so heissen A und B **invers** zueinander.

Man schreibt auch A^{-1} oder $\mathbf{inv}(A)$ für die inverse Matrix.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan-Algorithmus

Um die inverse Matrix zu berechnen verwendet man den **Gauss-Jordan-Algorithmus**.

Die Idee des Verfahrens ist vom Lösen von Gleichungssystemen mit dem Eliminationsverfahren (Gauss-Verfahren) bekannt.

Zuerst schreibt man die Matrix auf die eine Seite und die Einheitsmatrix mit gleicher Dimension auf die andere Seite.

Man beginnt mit elementaren Zeilenoperationen umzuformen, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht.

Umformungsschritte:

- Man wählt die erste Spalte von links, in der mindestens ein von Null verschiedener Wert steht.
- Ist die oberste Zahl der gewählten Spalte eine Null, so vertauscht man die erste Zeile mit einer anderen Zeile, in der in dieser Spalte keine Null steht.
- Man dividiert die erste Zeile durch das nun oberste Element der gewählten Spalte.
- Man subtrahiert entsprechende Vielfache der ersten Zeile von den darunterliegenden Zeilen mit dem Ziel, dass das erste Element jeder Zeile (ausser der ersten) Null wird.
- Durch Streichen der ersten Zeile und Spalte erhält man eine Restmatrix, auf die man diese Schritte wieder anwendet. Das führt man solange durch, bis die Matrix in Zeilenstufenform ist.
- Man zieht danach von den darüberliegenden Zeilen entsprechende Vielfache ab, sodass über einer führenden 1 nur Nullen stehen.

Beispiel

Berechnung der inversen Matrix von $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 8 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \div 6 \\ \div 4 \end{array} \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ - \textcircled{\text{I}} \\ - \textcircled{\text{I}} \end{array} \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{12}{5} \\ \cdot \frac{3}{2} \end{array} \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ - \textcircled{\text{II}} \end{array} \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \frac{20}{3} \end{array} \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ - \frac{3}{5} \cdot \textcircled{\text{III}} \\ \end{array} \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ - \frac{4}{3} \cdot \textcircled{\text{II}} - \frac{1}{2} \cdot \textcircled{\text{III}} \\ \end{array} \\ \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array} \right) \end{aligned}$$

d.h. das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

┌

26. Berechne die inverse Matrix mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus von Hand:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

27. Löse die folgenden **Gleichungssysteme** mit Hilfe der inversen Matrix:

a)

$$2w+2x-y+z=1$$

$$w+3x+z=1$$

$$2w+4x-y+2z=1$$

$$1w+2x-y+z=1$$

b)

$$v+w=1$$

$$w+x=2$$

$$x+y=3$$

$$y+z=4$$

$$v+z=5$$

c)

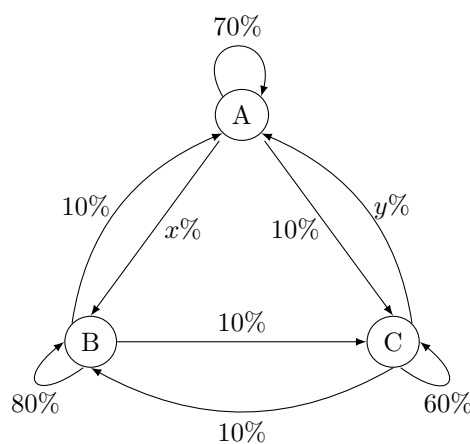
$$9x+7y=13$$

$$2x-3y+4z=48$$

$$5x-8y+6z=85$$

28. Übergangsmatrizen

In einer Kleinstadt mit ca. 20000 Haushalten gibt es drei grosse Supermärkte A, B und C, in denen sich die Haushalte mit Lebensmitteln versorgen. Das monatliche Wechselverhalten der Haushalte ist durch folgenden Übergangsgraphen gegeben:



a) Stelle die Übergangsmatrix auf und berechne die fehlenden Angaben x und y .

In diesem Monat kaufen 3500 Haushalte bei A, 11'200 Haushalte bei B und der Rest bei C ein.

b) Berechne die (ungefähre) Verteilung des Vormonats (d.h. runden auf ganze Zahlen).

c) Berechne die Verteilung des Folgemonats.

d) Um längerfristig planen zu können, möchte man wissen, wie das Wechselverhalten in einem Zeitraum von einem Jahr, d.h. 12 Monaten aussieht. Gib die Übergangsmatrix hierfür an.

29. Berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

die Produkte AB , BA , $A^{-1}B^{-1}$, $B^{-1}A^{-1}$, $(AB)^{-1}$ und $(BA)^{-1}$.

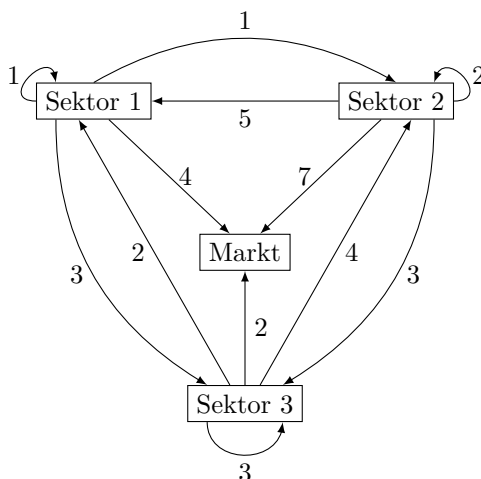
Was fällt auf? Gilt dies allgemein?

2 Input-Output-Analyse, Leontief-Modell

Die Input-Output-Analyse ist eines der wichtigsten Analysemodelle der Wirtschaftspolitik. Mit ihr lassen sich Verflechtungen zwischen verschiedenen Produktionsunternehmen oder Sektoren, z.B. Gewinnung von Rohstoffen, Verarbeitung und Dienstleistungen einer Volkswirtschaft untersuchen, z.B. die Auswirkungen von Beschäftigungs-, Produktions- und Preisänderungen eines Sektors auf die Beschäftigung, Preise, Produktion und Entwicklung anderer Sektoren.

Der russisch-amerikanische Wirtschaftswissenschaftler Wassily Leontief (1905-1999) hat die Input-Output-Analyse entwickelt. Für seine Ausarbeitung und Anwendung dieser Methode bei wichtigen wirtschaftlichen Problemen erhielt er 1973 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

Die Darstellung solcher Verflechtungen erfolgt in **Verflechtungsgraphen**:



Oder in sogenannten **Input-Output-Tabellen**:

	S1	S2	S3	Nachfrage(Markt)	Gesamtproduktion
S1	1	1	3	4	9
S2	5	2	3	7	17
S3	2	4	3	2	11

In einer Zeile lässt sich der Output eines Sektors ablesen, z.B. liefert Sektor 2 5 Mengeneinheiten an Sektor 1, 2 ME verbraucht der Sektor 2 selbst und 3 ME gehen an Sektor 3.

Für den Konsumenten (=Nachfrage) verbleiben 7 ME bei einer Gesamtproduktion von 17 ME.

In einer Spalte lässt sich der Input eines Sektors ablesen, z.B. bezieht Sektor 3 zur Produktion von 11 ME 3 ME von Sektor 1, 3 von Sektor 2 und 3 ME produziert er für sich selbst.

Die Input-Output Analyse berücksichtigt also, dass die Nachfrage des Marktes, d.h. der Konsumenten nach bestimmten Produkten auch zu einer internen Nachfrage bei den Produktionssektoren selbst führt. Dies ist einleuchtend, da die Produktion eines Sektors ja auch Produkte von anderen Sektoren braucht, wie z.B. Maschinen. Daraus resultiert dann eine Erfassung der Waren und der Serviceleistungen, die in einer Volkswirtschaft zirkulieren.

Die Input-Output-Analyse wird in verschiedensten Bereichen von vielen industrialisierten Staaten verwendet, um Planungen zu erstellen oder Vorhersagen machen zu können, wie sich die nationale Wirtschaft entwickelt. Die Input-Output-Analyse wird auch zum Stoffstrommanagement eingesetzt, d.h. es werden Stoffmengen (=Output) wie beispielsweise Produkte, Abfall, Abwasser, Emissionen ins Verhältnis zu den eintretenden Stoffmengen (=Input) wie Rohstoffe, Hilfsstoffe, Energiezufuhr gesetzt.

Allgemein gilt:

	S1	S2	S3	Nachfrage(Markt)	Gesamtproduktion
S1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	y_1	x_1
S2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	y_2	x_2
S3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	y_3	x_3

Überprüfe, dass folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Die Einträge in der Input-Output-Tabelle hängen von der Gesamtproduktion ab, die aber veränderlich ist. Also normiert man die Einträge so, dass sie sich auf die Produktion einer ME beziehen. Sie geben also den Anteil an einer produzierten Einheit wieder. So erhält man die sogenannte **Inputmatrix, Verflechtungsmatrix oder Technologiematrix**, hier mit A bezeichnet. Die Matrixeinträge heißen **Technologiekoeffizienten**.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{x_1} & \frac{a_{12}}{x_2} & \frac{a_{13}}{x_3} \\ \frac{a_{21}}{x_1} & \frac{a_{22}}{x_2} & \frac{a_{23}}{x_3} \\ \frac{a_{31}}{x_1} & \frac{a_{32}}{x_2} & \frac{a_{33}}{x_3} \end{pmatrix}$$

- Bestimme die Verflechtungsmatrix für das Beispiel und zeige, dass die Gleichung $\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{y}$ gilt.

Die in Aufgabe 1 bestätigte Gleichung $\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{y}$ ist die wichtigste Gleichung der Input-Output-Analyse, mit der sich verschiedene Probleme lösen lassen wie z.B.

- bei bekannter Gesamtproduktion lässt sich die für den Markt zur Verfügung stehende Menge der Produktion berechnen.
- zu einer bekannten Marktnachfrage lässt sich die jeweils notwendige Gesamtproduktion bestimmen.

- Gib für beide Probleme die jeweils benötigte Gleichung an.

Die Matrix $(E - A)$ heisst **Leontief-Matrix**, die Matrix $(E - A)^{-1}$ heisst **Leontief-Inverse**.

- Die Verflechtungen eines Produktionsbetriebes mit drei Abteilungen F , G und H lässt sich nach dem Leontief-Modell durch die folgende Verflechtungsmatrix A beschreiben.

$$A = \begin{matrix} & F & G & H \\ \begin{matrix} F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Abteilung F produziert 600 ME, Abteilung G 700 ME und Abteilung H 400 ME.
Bestimme, wie viele Mengeneinheiten von den unterschiedlichen Abteilungen für den Konsumenten produziert werden.
- Der Markt hat eine Nachfrage von 86 ME der Abteilung F , 79 der Abteilung G und 102 der Abteilung H .
Wie gross muss die Gesamtproduktion je Abteilung jeweils sein, um die Nachfrage des Marktes bedienen zu können?

4. In dieser Aufgabe soll eine Volkswirtschaft betrachtet werden, die in einen landwirtschaftlichen Sektor L und einen industriellen Sektor I aufgeteilt ist. Die Produktion von 1 ME im Sektor L benötigt $\frac{7}{24}$ ME des Outputs von L und $\frac{1}{8}$ ME des Outputs von I. Die Produktion von 1 ME im Sektor I benötigt $\frac{1}{4}$ ME aus L und $\frac{1}{4}$ ME aus I.
- Gib die Verflechtungsmatrix A an.
 - Im Sektor L werden 240 ME produziert, im Sektor I beträgt die Produktion 120 ME. Welche Endnachfrage kann damit erfüllt werden?
 - Die Endnachfrage beträgt 216 ME der Produktion von Sektor L sowie 72 ME der Produktion von Sektor I. Wie gross muss die Gesamtproduktion der beiden Sektoren sein, um die Endnachfrage zu bedienen?
5. Eine Branche hat drei Sektoren S1, S2, S3, die drei Produkte P1, P2, P3 produzieren. Die wechselseitigen Verflechtungen der drei Sektoren sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Zur Herstellung von	benötigt man		
1 ME von P1	0.6 ME von P1	0.2 ME von P2	
1 ME von P2	0.25 ME von P1	0.6 ME von P2	0.1 ME von P3
1 ME von P3		0.1 ME von P2	0.6 ME von P3

- Gib die Verflechtungsmatrix A an.
 - Es werden 250 ME von P1, 200 ME von P2 und 80 ME von P3 produziert. Welche Endnachfrage kann damit erfüllt werden?
 - Der Endverbrauch beträgt 120 ME von P1, 150 ME von P2 sowie 80 ME von P3. Welche Mengen von P1, P2 bzw. P3 müssen die drei Sektoren dafür produzieren?
 - Was ist bei den Ergebnissen in b) und c) auffällig?
6. Wir betrachten eine Volkswirtschaft mit drei Sektoren Dienstleistungen (D), Landwirtschaft (L) und Industrie (I). Die Verflechtungsmatrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & L & I \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ L \\ I \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Was ist der Output, d.h. der Anteil, der an den Markt abgegeben werden kann, wenn der Produktionsvektor (Input) $\vec{x}_a = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 550 \end{pmatrix}$ ist.
- Der Industriesektor möchte nun seine Gesamtproduktion auf 650 Stück erhöhen, d.h. $\vec{x}_b = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 650 \end{pmatrix}$. Ist es dann immer noch möglich, der interne Nachfrage der anderen beiden Sektoren nachzukommen?
- Es soll nun ein Output von $\vec{y}_c = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$ an den Markt abgegeben werden können. Welche Produktionszahlen haben die einzelnen Sektoren dann?

3 Vermischte Aufgaben

1. Rechenregeln für Matrizen

Berechne möglichst geschickt (Rechenregeln zuerst anwenden).

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Nicht-Kommutativität

Zeige an folgendem Beispiel, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Inverse Matrix

Berechne die inverse Matrix mit dem Jordan-Gauss-Algorithmus:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

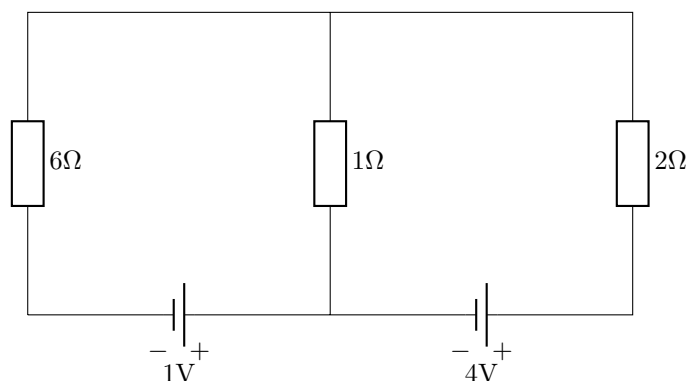
4. Gleichungssysteme

Schreibe das folgende Gleichungssystem mit Hilfe einer Matrix auf und löse es mit Hilfe von Matrizenrechnung.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 \\ 5x - 4z &= -7 \\ -6x + 8y + 7z &= 31 \end{aligned}$$

5. Gleichungssysteme in Anwendungen

Es ist folgender Stromkreis gegeben, berechne die Stromstärken in den Widerständen.



Stelle das zugehörige Gleichungssystem mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln⁴ auf und löse es mit Matrizenrechnung.

⁴Die Erklärung der Kirchhoffschen Regeln ist z.B. auf LEIFIPhysik zu finden.
<https://www.leifiphysik.de/elektrizitaetslehre/komplexere-schaltkreise/grundwissen/kirchhoffsche-gesetze>

6. Kodierung

Frank will eine Matrix F kodiert verschicken. Dazu multipliziert er sie mit einer "Kodier"-Matrix K und erhält die Matrix S , die er dann verschickt ($F \cdot K = S$).

Susi, die Matrix S erhalten hat, will nun die Nachricht dekodieren. Dazu braucht sie eine "Dekodier"-Matrix D mit der sie ihre Matrix multipliziert, um die Originalnachricht F zu erhalten. $S \cdot D = F \cdot K \cdot D = F \cdot E = F$, wobei E die Einheitsmatrix ist. Es gilt also $K \cdot D = E$. Bestimme die Dekodier-Matrix D für

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Bestellmatrizen

In den Läden einer Bioladenkette kann man drei verschiedene Müeslimischungen kaufen. Die einzelnen Läden werden einmal im Monat mit den Grundzutaten beliefert und stellen die Mischung selbst zusammen.

Die Mischungsverhältnisse pro kg Mischung sind:

	Mischung 1	Mischung 2	Mischung 3
Weizenflocken	0.8	0.3	0
Dinkelflocken	0	0.3	0.5
Haferflocken	0	0.3	0.3
Rosinen	0.05	0.1	0.1
Leinsamen	0.15	0	0.1

Die Absatzmenge zweier Läden ist durch folgende Tabelle gegeben:

	Laden 1	Laden 2
Mischung 1	25 kg	17 kg
Mischung 2	30 kg	20 kg
Mischung 3	15 kg	18 kg

Berechne für Laden 1 und 2 die Liefermengen der fünf Zutaten.

	Laden 1	Laden 2
Weizenflocken		
Dinkelflocken		
Haferflocken		
Rosinen		
Leinsamen		

8. Bestellmatrizen

In einer Möbelfabrik werden 4 verschiedene Typen von Schränken hergestellt. Folgende Tabelle gibt an, wie viele Elemente jeweils für das entsprechende Element benötigt werden.

	Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4
Korpuse	1	1	1	1
Türen	0	0	1	1
Tablare	3	0	3	3
Schubladenelemente	1	2	0	1

- Wie viel Stück der Elemente müssen jeweils produziert werden, um 20 Stück von Typ 1, 25 Stück von Typ 2, 40 Stück von Typ 3 und 50 Stück von Typ 4 liefern zu können?
- Wie viel Stück jeden Typs sind bestellt worden, wenn man 109 Korpuse, 59 Türen, 297 Tablare und 94 Schubladenelemente hergestellt hat?

9. Produktionsmatrizen

Herr Müller backt für Hotels in der Umgebung Kuchen. Bei seiner ersten Bestellung hat er sich zwar die Mengen aufgeschrieben, die er für alle Kuchen zusammen gebraucht hat, hat aber vergessen wie viele Kuchen jeder Sorte er gemacht hat. Für die Rechnungsstellung muss er die genaue Anzahl Kuchen aber angeben. Insgesamt hat er für w Zitronencakes, x Hauscakes, y Marmorkuchen und z Kokuscakes 2.75 kg Butter, 2.8 kg Zucker, 57 Eier und 3.4 kg Mehl verarbeitet.

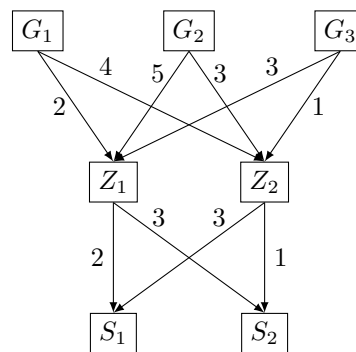
Aus seinen Rezepten weiss er, dass er folgende Mengen pro Kuchen benötigt:

	Zitronencake	Hauscake	Marmorkuchen	Kokuscake
Butter	250 g	125 g	250 g	125 g
Zucker	250 g	125 g	200 g	175 g
Eier	4	3	5	4
Mehl	200 g	250 g	300 g	250 g

Kannst du ihm helfen und berechnen, wie viele Kuchen jeder Sorte er gebacken hat?

10. Produktionsmatrizen

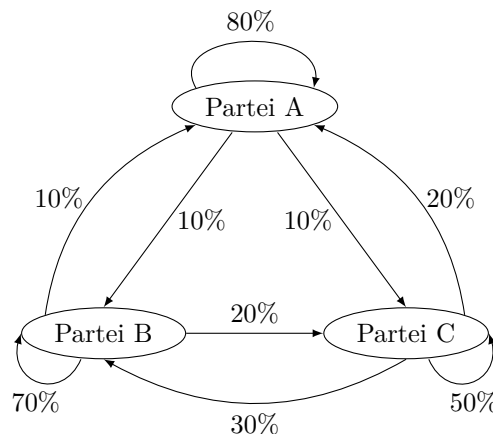
Ein Seifenhersteller stellt aus drei Grundstoffen (G_1, G_2, G_3) zwei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2) und aus diesen die beiden Seifensorten (S_1, S_2) her. Der Mengenbedarf in Mengeneinheiten (ME) für die Zwischen und Endprodukte lässt sich aus dem Verflechtungsgraphen entnehmen. Dabei geben die Zahlen an, wie viele ME an Vorprodukten für eine ME des Folgeprodukts benötigt werden.



- Bestimme eine Matrix, aus der man für jede Seife die ME an Grundstoffen ablesen kann.
- Es liegt eine Bestellung von 100 Stück der Sorte S_1 und 150 Stück der Sorte S_2 vor. Wie viele Mengeneinheiten an Grundstoffen werden benötigt?

11. Übergangsmatrizen

Der Übergangsgraph bei den Parteien A, B und C von Wahl zu Wahl ist folgendermassen gegeben:



Bei einer Wahl hat es bei der Partei A gerade zur absoluten Mehrheit gereicht.

Ergebnis der Wahl:

Partei A 50%

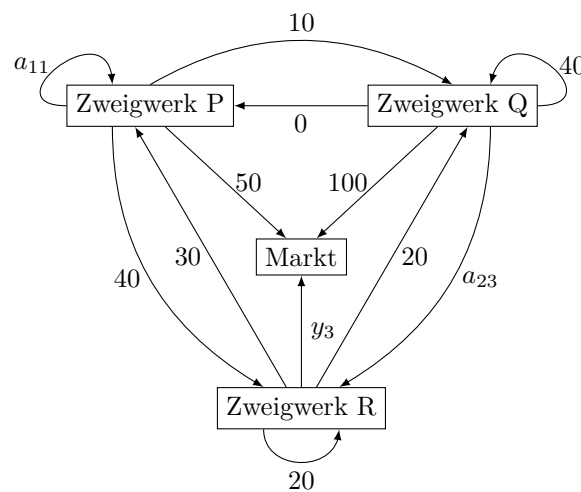
Partei B 40%

Partei C 10%

- Die nun regierende Partei möchte wissen, ob es bei der nächsten Wahl wieder reichen wird, bzw. mit welchem Ergebnis zu rechnen ist.
- Wie sieht die Verteilung bei der übernächsten Wahl aus?
- Um längerfristig planen zu können, möchte die Partei wissen, wie das Wechselverhalten in einem Zeitraum von 3 Wahlperioden aussieht. Gib die Übergangsmatrix hierfür an.

12. Input-Output-Analyse

Die drei Zweigwerke P, Q und R eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem LEONTIEF-Modell verflochten. Das folgende Diagramm stellt die Verflechtung dar.



- Die Gesamtproduktion der Zweigwerke ist $\begin{pmatrix} 100 \\ 160 \\ 200 \end{pmatrix}$. Bestimme daraus a_{11}, a_{23} und y_3 .
- Bestimme die Inputmatrix.
- Die Endnachfrage beträgt 57 ME von Zweigwerk P, 26 ME von Zweigwerk Q und 60 ME von Zweigwerk R. Wie viel müssen die drei Zweigwerke produzieren?
- Es werden insgesamt 600 ME von Zweigwerk P, 1200 ME von Zweigwerk Q und 720 ME von Zweigwerk R produziert. Welche Endnachfrage kann damit erfüllt werden?
- Nach einer Umstellung des Produktionsverfahrens ist eine neue Inputmatrix gegeben durch: $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1t^2 & 0.2 \\ 0 & 0.1t^2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$, dabei ist $t \in [0.5; 3]$ ein reeller technologieabhängiger Parameter.

Für die Gesamt-Produktion ist folgender Produktionsvektor geplant: $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} 200 \\ 40t \\ 100 \end{pmatrix}$

Berechne den Wert von t , für den am meisten Produkte aller drei Zweigwerke für den Markt produziert werden.

4 Vektorräume

4.1 Definition und Beispiele

Wir möchten das Konzept der Addition und skalaren Multiplikation auf allgemeinere Weise erweitern. Dazu möchten wir für beliebige Mengen gewisse Eigenschaften definieren, die uns so ein Vorhaben ermöglichen.

Vektorraum

Es sei \mathbb{K} ein sogenannter **Körper** (für uns ist \mathbb{K} immer \mathbb{R}). Eine Menge V zusammen mit einer Abbildung $+$: $V \times V \rightarrow V$ und einer Abbildung \cdot : $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ heißt **Vektorraum**, wenn für alle $u, v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ folgende Axiome erfüllt sind:

1. Es gibt ein eindeutiges Element $0 \in V$, so dass $0 + v = v + 0 = v$.
2. Es gilt $v + w = w + v$.
3. Es gilt $u + (v + w) = (u + v) + w$.
4. Es gibt ein eindeutiges Element $-v \in V$, so dass $v + (-v) = (-v) + v = 0$.
5. Es gilt $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.
6. Es gilt $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
7. Es gilt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.
8. Es gibt ein eindeutiges Element $1 \in \mathbb{K}$, so dass $1 \cdot v = v$.

Die Elemente eines Vektorraums V nennt man per Definition **Vektoren**.

Beispiel: \mathbb{R}

Wir möchten zeigen, dass die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} ein Vektorraum ist. Dazu müssen wir alle Punkte bei der Definition eines Vektorraums überprüfen mit $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}$. Betrachten wir zwei beliebige Elemente $v, w \in \mathbb{R}$. Dann ist es klar, dass es ein eindeutiges Element $0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $0 + v = v + 0 = 0$. Dieses Element ist in diesem Fall die Zahl 0. Punkt 2. und 3. sind auch klar, da wir auf den reellen Zahlen das *Kommutativ-* und *Assoziativgesetz* bezüglich der Addition haben. Punkt 4. ist deswegen erfüllt, da es zu jeder Zahl $v \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Gegenzahl $-v \in \mathbb{R}$ gibt, welche diese Eigenschaft aufweist. Da in diesem Fall $\mathbb{K} = V$ folgen auch die Punkte 5., 6. und 7. automatisch wegen dem *Distributivgesetz* und dem *Assoziativgesetz* bezüglich der Multiplikation. Punkt 8. ist auch erfüllt, da es nur eine Zahl in \mathbb{R} gibt, die diese Eigenschaft hat, nämlich die Zahl Eins. Somit haben wir gezeigt, dass die Menge \mathbb{R} tatsächlich ein Vektorraum ist. \square

Beispiel: \mathbb{R}^n , $n \geq 2$

Wir möchten nun zeigen, dass die Menge \mathbb{R}^n ein Vektorraum ist. Wieder ist dabei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, jedoch $V = \mathbb{R}^n$. Punkt 1. ist erfüllt, da der Nullvektor $0 \in \mathbb{R}^n$ diese Eigenschaft als einziges Element erfüllt. Punkt 2. und 3. sind wieder aufgrund des *Kommutativ-* und *Assoziativgesetzes* bezüglich der Addition auf \mathbb{R}^n erfüllt. Für ein Element

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

gibt es ein eindeutiges Element

$$-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit der Eigenschaft $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = 0 \in \mathbb{R}^n$. Somit ist auch Punkt 4. erfüllt.

Punkt 5., 6. und 7. sind auch erfüllt: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \vdots \\ \lambda w_n \end{pmatrix} = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w} \in \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda + \mu)\vec{v} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)v_1 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu)v_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \vdots \\ \mu v_n \end{pmatrix} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda\mu)\vec{v} = (\lambda\mu) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda\mu)v_1 \\ \vdots \\ (\lambda\mu)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu v_1) \\ \vdots \\ \lambda(\mu v_n) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \vdots \\ \mu v_n \end{pmatrix} = \lambda(\mu \vec{v}) \in \mathbb{R}^n$$

Punkt 8. ist auch erfüllt, da folgendes gilt:

$$1 \cdot \vec{v} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot v_1 \\ \vdots \\ 1 \cdot v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Damit haben wir gezeigt, dass \mathbb{R}^n ein Vektorraum ist. └

1. Zeige, dass die Menge aller 2×2 Matrizen mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ einen Vektorraum bildet.
2. Zeige, dass die Menge aller $n \times n$ Matrizen mit $n \geq 3$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ einen Vektorraum bildet.
3. Zeige, dass die Menge aller Funktionen $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ einen Vektorraum bildet.

4.2 Basis und Dimension

Bei einem Vektorraum V kann man sich fragen, ob es möglich ist, mithilfe der Addition und der skalaren Multiplikation aus einer (minimalen) Menge von Vektoren in V alle weiteren Vektoren in V zu beschreiben. Das heisst, wir fragen uns, ob es eine minimale Menge $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ gibt mit der Eigenschaft, dass es für alle $v \in V$ reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt, so dass

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i. \quad (1)$$

Tatsächlich ist es immer möglich, eine solche Menge an Vektoren zu finden, obwohl die Elemente b_1, \dots, b_n nicht eindeutig bestimmt sind. Es gibt also verschiedene solcher Mengen. Trotzdem haben alle diese Mengen eine wichtige gemeinsame Eigenschaft, und zwar, dass sie gleich viele Elemente beinhalten. Wir nennen eine solche Menge $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine **Basis** (manchmal auch **minimales Erzeugendensystem**) des Vektorraums V und die Zahl n die **Dimension** des Vektorraums V . Man schreibt oft auch $\dim V = n$. Falls ein Vektor v mithilfe von Vektoren b_1, \dots, b_n und reellen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in der Form (1) geschrieben werden kann, sagt man v ist eine **Linearkombination** der Vektoren b_1, \dots, b_n .

Beispiel: \mathbb{R}^2

Eine Basis des Vektorraums \mathbb{R}^2 ist z.B. gegeben durch $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, wobei

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Basis heisst **Standardbasis** im \mathbb{R}^2 . Tatsächlich kann man jeden Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mithilfe von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 schreiben. Es gilt nämlich

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$$

Somit sehen wir, dass in diesem Fall $\lambda_1 = v_1$ und $\lambda_2 = v_2$ Eine weitere Basis ist gegeben durch

$$\left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Wir möchten zeigen, dass es für jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ reelle Zahlen λ_1 und λ_2 gibt, so dass

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2$$

Tatsächlich können wir das folgende Gleichungssystem betrachten:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\lambda_1 \\ v_2 &= 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir für beliebige $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ lösen. Wir erhalten die Lösungsmenge

$$\left\{ -v_1, -\frac{2v_1 + v_2}{3} \right\}$$

Somit gibt es immer zwei reelle Zahlen λ_1 und λ_2 , so dass $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2$. Es gilt also

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -v_1 \\ \lambda_2 &= -\frac{2v_1 + v_2}{3} \end{aligned}$$

Wir bemerken leicht, dass $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. └

4. Finde eine Basis von \mathbb{R}^n und bestimme die Dimension.
5. Finde eine Basis des Vektorraums der 2×2 Matrizen und bestimme die Dimension. Betrachte auch die Verallgemeinerung auf $n \times n$ Matrizen, gib eine Basis an und bestimme die Dimension.

4.3 Basiswechsel

Im Vektorraum \mathbb{R}^n beschreiben wir einen Vektor \vec{v} grundsätzlich als Linearkombination in der Standardbasis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, d.h. als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$$

Wenn wir nun eine weitere Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ betrachten, fragen wir uns, wie wir einen Vektor \vec{v} als Linearkombination bezüglich dieser Basis schreiben. Das können wir mithilfe einer Matrix machen. Diese Matrix beschreibt den Wechsel der Darstellung eines Vektors bezüglich einer Basis $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ in die Darstellung bezüglich einer neuen Basis $B' = \{\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_n\}$. Wir bezeichnen diese Matrix als $T_{B'}^B$ und nennen sie **Transformationsmatrix**. Sie ist eine $n \times n$ Matrix der Form

$$T_{B'}^B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6. Zeige, dass

$$\vec{b}_j = a_{1j} \vec{b}'_1 + a_{2j} \vec{b}'_2 + \dots + a_{nj} \vec{b}'_n = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{b}'_i$$

Folgere daraus, dass die Vektoren der ursprünglichen Basis als Linearkombination der Vektoren der neuen Basis geschrieben werden können, wobei die Koeffizienten die Spalten der Transformationsmatrix beschreiben.

Angenommen ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sei nun zuerst in der Basis B gegeben, d.h. als Linearkombination

$$\vec{v} = v_1 \vec{b}_1 + \dots + v_n \vec{b}_n = \sum_{i=1}^n v_i \vec{b}_i$$

Als Linearkombination der neuen Basis, ist \vec{v} von der Form

$$\vec{v} = v'_1 \vec{b}'_1 + \dots + v'_n \vec{b}'_n = \sum_{i=1}^n v'_i \vec{b}'_i$$

Somit folgt

$$v_1 \vec{b}_1 + \dots + v_n \vec{b}_n = v'_1 \vec{b}'_1 + \dots + v'_n \vec{b}'_n$$

Beispiel: Basiswechsel im \mathbb{R}^3

Angenommen wir haben die folgenden beiden Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Somit folgt, dass wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11} v'_1 + a_{21} v'_2 + a_{31} v'_3 \\ v_2 &= a_{12} v'_1 + a_{22} v'_2 + a_{32} v'_3 \\ v_3 &= a_{13} v'_1 + a_{23} v'_2 + a_{33} v'_3 \end{aligned}$$

lösen müssen. Wenn wir also die Matrix mit den Spalten $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ und die Matrix mit den Spalten $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$ aufstellen, können wir den Gauss-Jordan Algorithmus benutzen um das zu lösen. Wir bekommen somit

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Wenn wir den Gauss-Jordan Algorithmus nun anwenden, um links die Einheitsmatrix zu bekommen, erhalten wir rechts die Transformationsmatrix

$$T_{B'}^B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Vektor in der Basis B betrachten, erhalten wir den zugehörigen Vektor in der Basis B' durch Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet

$$\vec{v} = 5\vec{b}'_1 + 2\vec{b}'_2 + 0 \cdot \vec{b}'_3$$

—

7. Betrachte die Basis im \mathbb{R}^2 bestehend aus den folgenden beiden Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Stelle den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von \vec{b}_1 und \vec{b}_2 (graphisch und algebraisch) dar.
- Was sind die Koordinaten von \vec{v} in dieser neuen Basis?
- Ein Vektor \vec{u} hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$. Welchen Koordinaten entspricht das in der Standardbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?

4.4 Lineare Hülle

Wenn wir m linear unabhängige Vektoren v_1, \dots, v_m eines Vektorraums V gegeben haben, wobei $m \leq \dim V$, können wir einen Unterraum von V definieren, der durch diese m Vektoren *erzeugt* wird. Wir nennen diesen Unterraum die *lineare Hülle* der Vektoren v_1, \dots, v_m und bezeichnen ihn mit $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$. Dieser Unterraum hat dann jeweils die Dimension m . Wir definieren die Elemente von $\text{span}(v_1, \dots, v_m)$ als die Vektoren in V , die man als Linearkombination der Vektoren v_1, \dots, v_m schreiben kann. Die lineare Hülle ist ausserdem immer ein *Untervektorraum* eines Vektorraums V , das bedeutet, dass diese Teilmenge selbst einen Vektorraum bildet.

8. Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Zeige, dass die drei Vektoren nicht linear unabhängig sind.
- Wie viele der Vektoren sind linear unabhängig? Welche Dimension hat also dieser Unterraum von \mathbb{R}^3 ?
- Was ist die lineare Hülle dieser Vektoren?

9. Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Liegt der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ in der linearen Hülle von \vec{v}_1 und \vec{v}_2 ?

10. Gegeben seien die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Bestimme, ob die drei Vektoren linear unabhängig sind.
- Bestimme die Dimension der linearen Hülle der drei Vektoren.
- Schreibe die drei Vektoren nebeneinander in eine 3×3 -Matrix. Und bringe diese auf Zeilenstufenform. Wie viele Zeilen haben nicht nur ausschliesslich Nullen?

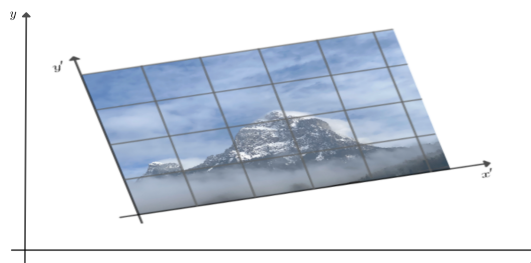
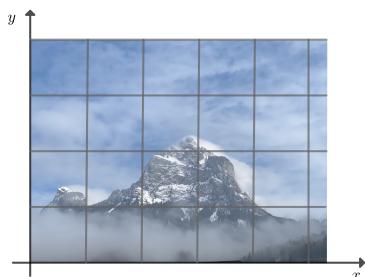
5 Abbildungen

5.1 Abbildungen mit Matrizen beschreiben

Computerspiele und Webseiten zeigen oft hervorragende Bilder von dreidimensionalen Umgebungen und Objekten. Diese werden mit Computerprogrammen wie z.B. 3D-Programmen (z.B. Blender, www.blender.org) hergestellt und sind mittlerweile so gut, dass es teilweise schwer fällt die virtuellen Darstellungen von echten Aufnahmen zu unterscheiden. Um 3D-Objekte z.B. am Computerbildschirm, der immer noch ein 2D-Bild darstellt, zu verschieben, zu drehen, zu spiegeln oder zu projizieren, müssen im Hintergrund mathematische Berechnungen ablaufen, die mit Matrizen gemacht werden.

Du hast bereits die folgenden Kongruenzabbildungen kennengelernt: Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen und Verkettungen. Diese Abbildungen sind winkeltreu und längentreu. Kongruenzabbildungen bilden also ein Quadratgitter auf ein Quadratgitter derselben Maschenweite ab.

Wir werden im folgenden Kapitel Abbildungen allgemeiner untersuchen, die ein Quadratgitter auf ein Parallelogrammgitter abbilden. Man nennt solche Abbildungen **affine Abbildungen**.



- Bei einer affinen Abbildung wird der Koordinatenursprung O auf den Punkt $O'(3, 2)$ abgebildet. Punkt $P(1, 0)$ wird auf $P'(5, 3)$ und Punkt $Q(0, 1)$ auf $Q'(4, 0)$ abgebildet. Man kann die Abbildung durch eine Abbildungsgleichung beschreiben:

$$\vec{x}' = T \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

wobei T eine 2×2 -Matrix ist,

Bestimme T und \vec{b} .

Zeichne das neue Koordinatensystem. Was fällt auf?

- Schreibe die Abbildungsgleichung in der Form $\vec{x}' = T \cdot \vec{x} + \vec{b}$ auf und zeichne das neue Koordinatengitter.

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $x' = -\frac{1}{3}x + y - 2$
 $y' = x - \frac{1}{4}y + 1$

- Eine affine Abbildung bildet $O(0, 0)$ auf $O'(-1, 2)$, $E_1(1, 0)$ auf $E'_1(1, 1)$ und $E_2(0, 1)$ auf $E'_2(0, 3)$ ab.

- Zeichne das Koordinatensystem nach der Abbildung.
- Zeichne die Punkte $A(2, 1)$, $B(-3, 2)$, $C(1, -3)$ ins neue Koordinatensystem ein (die Koordinaten bleiben gleich) und lies die Koordinaten der Bildpunkte im alten Koordinatensystem heraus.
- Stelle die Abbildungsgleichung auf und berechne damit die Koordinaten der Bildpunkte. Vergleiche die berechneten Werte mit den in der Graphik abgelesenen.

4. Bestimme bei den folgenden affinen Abbildungen die Abbildungsgleichung (ohne Rechnung, erst zeichnen, dann $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ abbilden, dann Matrix aufstellen).

- | | |
|--|--|
| a) Spiegelung an der Geraden $y = 8$ | b) Spiegelung an der Geraden $x = 3$ |
| c) Spiegelung am Punkt $P(3, 0)$ | d) Spiegelung am Punkt $S(-2, 1)$ |
| e) Drehung um $D(3, 0)$ mit $\phi = 90^\circ$ | f) Drehung um $F(0, 2)$ mit $\phi = 270^\circ$ |
| g) zentrische Streckung von $Z(1, 2)$ aus mit dem Faktor 2 | |

Bemerkung: Abbildungsgleichungen in der Ebene und im Raum finden sich im FoTaBe auf S. 111-114.

5.2 Umkehrung von Abbildungen

Umkehrabbildung

Bildet eine Abbildung

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

einen Punkt P auf P' ab, so bildet die **Umkehrabbildung** wieder P' auf P ab.

Die Abbildungsgleichung der Umkehrabbildung erhält man durch einfaches Umformen der Gleichung.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}' - \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot (\vec{x}' - \vec{b})$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{x}' - A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Also ist die Abbildungsgleichung der Umkehrabbildung gegeben durch:

$$\vec{x}' = A^{-1} \cdot \vec{x} - A^{-1} \cdot \vec{b}$$

Bemerkung: Wie bei Umkehrfunktionen bezeichnen wir in der Umkehrabbildung dann die unabhängige Variable wieder mit \vec{x} und die abhängige Variable mit \vec{x}' , d.h. das alte \vec{x}' wird \vec{x} und umgekehrt.

5. Berechne die Umkehrabbildung der folgenden Abbildungen.

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. Translation

- Stelle die Abbildungsgleichung auf, die zur Translation (=Verschiebung) um den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gehört.
- Gib die Umkehrabbildung an ohne zu rechnen.
- Berechne die Umkehrabbildung und vergleiche mit dem Ergebnis aus b). Erhältst du das gleiche Ergebnis?

7. Punktspiegelung

- Stelle die Abbildungsgleichung auf, die zur Punktspiegelung am Punkt $Z(1, 2)$ gehört.
- Bestimme die Umkehrabbildung durch eine Rechnung. Was stellst du fest?
- Begründe ohne Rechnung, dass jede Abbildungsmatrix zu einer Spiegelung an einem Punkt zu sich selbst invers ist.

8. Spiegelung

- a) Zeige, dass zur Spiegelung an der Geraden $g: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix $T = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$ gehört.
- b) Zeige durch Rechnung, dass die Matrix T zu sich selber invers ist.
- c) Begründe ohne Rechnung, dass jede Abbildungsmatrix zu einer Spiegelung an einer Geraden zu sich selbst invers ist.

9. Translation

Wir betrachten die Abbildung der Translation um den Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- a) Bestimme die Bildpunkte A' , B' und C' des Dreiecks ABC mit $A(1, 2, -3)$, $B(10, 7, 2)$ und $C(5, 4, 6)$ unter der Abbildung.
- b) Bestimme die Abbildungsgleichung.
- c) Bestimme die Umkehrabbildung.
- d) Setze die Bildpunkte A' , B' und C' in die Umkehrabbildung ein und zeige so, dass man wieder die Originalpunkte erhält.

10. Punktspiegelung

Durch die Abbildung $\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird eine Spiegelung am Punkt $Z(1, 2, -3)$ beschrieben.

- a) Bestimme den Bildpunkt P' des Punktes $P(1, 1, 1)$.
- b) Bestimme die Umkehrabbildung. Vergleiche das Ergebnis mit der ursprünglichen Abbildung, was stellst du fest. Stimmt das mit deinem bisherigen Wissen über Punktspiegelungen überein?
- c) Setze den Punkt P' in die Umkehrabbildung ein und zeige so, dass er wieder auf P abgebildet wird.

11. Spiegelung

Durch die Abbildung $\alpha: \vec{x}' = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ wird eine Spiegelung an einer Ebene beschrieben.

- a) Bestimme den Bildpunkt P' des Punktes $P(1, 1, 1)$.
- b) Bestimme die Umkehrabbildung.
- c) Zeige, dass die Abbildungsmatrix zu sich selber invers ist.
- d) Setze den Punkt P' in die Umkehrabbildung ein und zeige so, dass er wieder auf P abgebildet wird.

5.3 Verkettung von Abbildungen

Verkettet man zwei affine Abbildungen $\beta \circ \alpha$ (sprich: β nach α) miteinander, so führt man zuerst α und dann β aus.

$$\alpha: \vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{a}$$

$$\beta: \vec{x}' = B \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

$$\beta \circ \alpha: \vec{x}' = B \cdot (A \cdot \vec{x} + \vec{a}) + \vec{b} = B \cdot A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{a} + \vec{b}$$

Bemerkung: Wegen der Nicht-Kommutativität der Matrizenmultiplikation ist $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

12. Nicht-Kommutativität der Verkettung

Gegeben ist die Spiegelung an der y -Achse

$$\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

und die Verschiebung um zwei Einheiten in die negative x -Richtung.

$$\beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Zeichne den Punkt $P(3, 2)$ in ein Koordinatensystem und spiegle ihn erst an der y -Achse und verschiebe danach um 2 Einheiten nach links. Überprüfe deine Zeichnung rechnerisch: Bilde den Ortsvektor des Punktes P mit α und den so erhaltenen Punkt mit β ab.
- Zeichne ein neues Koordinatensystem und trage wiederum den Punkt $P(3, 2)$ ein. Dieses Mal verschiebe den Punkt erst um 2 Einheiten nach links und spiegle ihn danach an der y -Achse. Überprüfe deine Zeichnung rechnerisch: Bilde den Ortsvektor des Punktes P mit β und den so erhaltenen Punkt mit α ab.
- Nun wollen wir an einem Beispiel durchrechnen, dass die Verkettung nicht kommutativ ist, auch, wenn kein Verschiebungsvektor vorhanden ist, d.h. die Abbildungen linear sind. Berechne also $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$ für

$$\alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

- Zeige allgemein, dass die Verkettung nicht kommutativ ist.

13. Berechne $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$.

$$\text{a) } \alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.4 Fixpunkte und Fixpunktgeraden

Ein **Fixpunkt** einer Abbildung ist ein Punkt, der unter der Abbildung unverändert bleibt.

Eine **Fixpunktgerade** ist eine Gerade, die aus Fixpunkten besteht, d.h. jeder Punkt der Gerade wird durch die Abbildung auf sich selber abgebildet.

Eine **Fixgerade** ist eine Gerade, die auf sich selber abgebildet wird, die einzelnen Punkte auf der Geraden verschieben sich allerdings.

Beispiel: Genau ein Fixpunkt

Um die Fixpunkte von

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen, muss man das lineare Gleichungssystem

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

lösen. Man schreibt es dazu am besten komponentenweise auf:

$$x = -1x - 2y - 8$$

$$y = 3x + 5y + 6$$

also:

$$2x + 2y = -8$$

$$3x + 4y = -6$$

dies löst man nach x und y auf und erhält:

$$x = -10 \text{ und } y = 6, \text{ d.h. der Fixpunkt ist } F(-10, 6).$$

Beispiel: Fixpunktgerade

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Man geht genau gleich vor, wie bei den Fixpunkten:

$$x = -1x - 2y + 4$$

$$y = 3x + 4y - 6$$

$$2x + 2y = 4$$

$$3x + 3y = 6$$

da man zwei äquivalente Gleichungen erhält, hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Die Fixpunktgerade ist also $x + y = 2$.

Beispiel: kein Fixpunkt

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man geht genau gleich vor, wie bei den Fixpunkten:

$$x = -1x - 2y - 3$$

$$y = 3x + 4y + 2$$

$$2x + 2y = 3$$

$$3x + 3y = -2$$

Man sieht, dass dieses Gleichungssystem keine Lösung hat, d.h. die Abbildung hat keinen Fixpunkt.

14. Haben die folgenden Abbildungen Fixpunkte? Wenn ja, bestimme alle Fixpunkte (bzw. Fixpunktgeraden).

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -4 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

e) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \end{pmatrix}$

f) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$

g) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$

h) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. Bestimme für jede Teilaufgabe die affine Abbildung mit der angegebenen Eigenschaft.

a) Die y -Achse ist Fixpunktgerade, $P(1, 0)$ wird auf $P'(2, 0)$ abgebildet.

b) Die Gerade $x = 3$ ist Fixpunktgerade, der Ursprung wird auf $O'(6, 0)$ abgebildet.

c) Der Ursprung ist der einzige Fixpunkt, $P(1, 0)$ wird auf $P'(3, 1)$ und $Q(0, 1)$ wird auf den Punkt $Q'(0, 4)$ abgebildet.

16. Bestimme in Abhängigkeit von t alle Fixpunkte der Abbildung.

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t+2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ t & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ 2t & 1-2t \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

5.5 Spezielle Abbildungen

Dieses Unterkapitel widmet sich geometrischen Abbildungen, die insbesondere in der Computergraphik eine bedeutende Rolle spielen. Die Objekte, die dargestellt werden, sind in der Regel dreidimensional und bewegen sich im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 . Rotationen und Spiegelungen, denen jeweils ein Unterkapitel gewidmet wird, stellen hier neben den Translationen (die nur eine Addition eines Vektors sind) die wichtigsten Abbildungen dar.

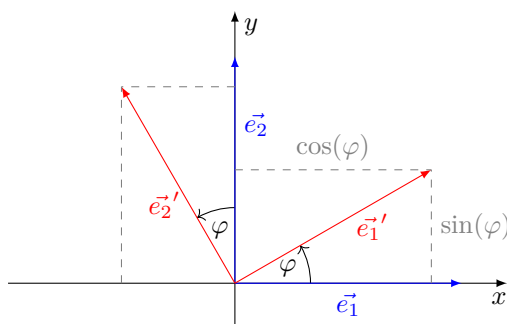
Ein gewöhnlicher Computerbildschirm kann ein Objekt nur zweidimensional darstellen. Um ein dreidimensionales Objekt zweidimensional darzustellen, werden Projektionen benutzt, mit denen man auch Schattenwürfe berechnen kann, weswegen den Projektionen auch ein Unterkapitel gewidmet wird.

Im Anschluss folgt ein Unterkapitel, welches sich generell mit linearen Abbildungen beschäftigt.

Bemerkung: Abbildungsgleichungen im Raum finden sich im FoTaBe auf S. 112-114.

5.5.1 Rotationen

Als erstes wird die Abbildungsmatrix für die Drehung um den Ursprung um den Winkel φ in \mathbb{R}^2 bestimmt. Dazu beschreibt man am besten die Bilder der Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Es gilt also $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

Somit ergibt sich für die Abbildungsgleichung einer Rotation in \mathbb{R}^2 :

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = D_\varphi \cdot \vec{x}$$

17. Additionstheoreme

D_α und D_β seien die Abbildungsmatrizen (in \mathbb{R}^2) der Drehungen um den Ursprung der $x - y$ -Ebene um die Winkel α respektive β .

- Begründe, dass $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$.
- Berechne das Produkt $D_\alpha \cdot D_\beta$.
- Leite durch $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$ die Additionstheoreme $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ und $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ her.

Bettet man die Drehung in \mathbb{R}^2 nun in \mathbb{R}^3 ein, so erhält man für

Der Drehwinkel ist so zu verstehen: Wenn man von der Spitze des Vektors, um den gedreht wird, zum Ursprung schaut, wird im positiven Drehwinkel (links herum) gedreht.

die Rotation um \vec{e}_1 (x -Achse) um den Winkel φ

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

die Rotation um \vec{e}_2 (y -Achse) um den Winkel φ

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

die Rotation um \vec{e}_3 (z -Achse) um den Winkel φ

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

18. Drehung um den Ursprung

Der Einheitswürfel (durch die drei Einheitsvektoren aufgespannt) wird mit dem Drehwinkel 60° um die

a) x -Achse

b) y -Achse

des \mathbb{R}^3 gedreht.

Bestimme jeweils die Koordinaten der Bilder der Eckpunkte und zeichne den gedrehten Würfel im Schrägbild.

„Wir können die Transformation von einem kartesischen Koordinatensystem auf ein anderes mittels dreier aufeinander folgender Drehungen durchführen, die in einer bestimmten Reihenfolge erfolgen müssen.“⁵ Die Drehlage wird durch drei Drehwinkel bestimmt (Eulersche Winkel, benannt nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler, α für die dritte Drehung um die z -Achse, β für die zweite Drehung um x -Achse und γ für die erste Drehung um die z -Achse). Die aus drei Einzeldrehungen zusammengesetzte Drehung kann durch eine einzige Matrix R_{zxz} beschrieben werden, die als Produkt der elementaren Drehmatrizen R_x, R_z dargestellt werden kann.

$$R_{zxz} = R_z(\alpha) \cdot R_x(\beta) \cdot R_z(\gamma) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\gamma) - \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma) & -\cos(\alpha) \sin(\gamma) - \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) & \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma) & -\sin(\alpha) \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) & -\cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\beta) \sin(\gamma) & \sin(\beta) \cos(\gamma) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Dreht man um eine beliebige Achse (gegeben durch einen Vektor \vec{v}) um den Winkel φ kann man anstatt die Euler-Winkel zu berechnen auch den Vektor normieren (d.h. Länge 1), dies macht man durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v}$$

Dann ergibt sich folgende Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) + n_1^2(1 - \cos(\varphi)) & n_1 n_2(1 - \cos(\varphi)) - n_3 \sin(\varphi) & n_1 n_3(1 - \cos(\varphi)) + n_2 \sin(\varphi) \\ n_1 n_2(1 - \cos(\varphi)) + n_3 \sin(\varphi) & \cos(\varphi) + n_2^2(1 - \cos(\varphi)) & n_2 n_3(1 - \cos(\varphi)) - n_1 \sin(\varphi) \\ n_3 n_1(1 - \cos(\varphi)) - n_2 \sin(\varphi) & n_2 n_3(1 - \cos(\varphi)) + n_1 \sin(\varphi) & \cos(\varphi) + n_3^2(1 - \cos(\varphi)) \end{pmatrix}$$

19. Drehung um beliebige Achse

Bestimme die Bilder der Eckpunkte des Einheitswürfels bei Drehung um den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ um 60° .

⁵Herbert Goldstein, Charles P. Poole Jr., John L. Safko: Klassische Mechanik. 3., vollständig und erweiterte Auflage. WILEY-VCH, 2006, ISBN 3-527-40589-5, S. 161 ff.

5.5.2 Spiegelungen

Spiegelungen im \mathbb{R}^2

Es ist einfach nachzuvollziehen, dass die Orthogonalspiegelung an der x -Achse durch die folgende Abbildungsmatrix S_x beschrieben wird.

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Will man nun an einer beliebigen Ursprungsgeraden $y = mx$ mit $m = \tan(\theta)$ spiegeln, so liegt es nahe, diese auf die Spiegelung an der x -Achse zurückzuführen. Zuerst dreht man die Spiegelachse um den Winkel $-\theta$ um den Ursprung, dann fällt die Bildgerade mit der x -Achse zusammen. Dann benutzt man S_x um die Spiegelung durchzuführen. Anschliessend macht man die Drehung wieder rückgängig, indem man um den Winkel θ um den Ursprung dreht.

Abbildungsmatrix der Drehung um den Winkel θ

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix der Drehung um den Winkel $-\theta$

$$D_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Abbildungsmatrix der Spiegelung an der Ursprungsgeraden $y = mx$ mit $m = \tan(\theta)$ ergibt sich also aus

$$S_{y=mx} = D_{-\theta} \cdot S_x \cdot D_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2 \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ 2 \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) & \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

20. Verkettung zweier Geradenspiegelungen entspricht Drehung

a) Zeige, dass

$$S_{y=mx} \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2 \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ 2 \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) & \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

(benutze dazu die Additionstheoreme FoTaBe S. 99, siehe auch Aufgabe 17)

b) Zeige, dass die Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen an sich schneidenden Ursprungsgeraden einer Drehung um den Ursprung entspricht (benutze dazu die in der ersten Teilaufgabe hergeleitete Beziehung).

D.h. Zeige

$$S_{y=m_1x} \cdot S_{y=m_2x} = D_\alpha$$

mit $\alpha = 2 \cdot (\theta_1 - \theta_2)$.

Spiegelungen in \mathbb{R}^3

Genauso, wie in \mathbb{R}^2 kann man die Abbildungsgleichung der Spiegelung an einer beliebigen Ebene finden, indem man drei Abbildungen hintereinander ausführt:

1. Drehung, so dass der Normalenvektor der Ebene auf die z -Achse zu liegen kommt
2. Orthogonalspiegelung an der $x - y$ -Ebene
3. Rückgängig machen der Drehung aus 1.

Es ist einfach nachzuvollziehen, dass die Orthogonalspiegelung an der $x - y$ -Ebene durch die folgende Abbildungsmatrix S_{xy} beschrieben wird.

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

21. Spiegelung an einer beliebigen Ebene

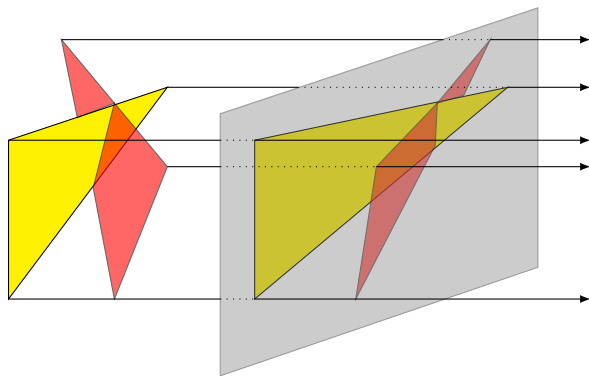
Spiegle den Punkt $P(5, 5, 5)$ an der Ebene $2x + y + z = 0$.

Bemerkung: die Drehmatrix wurde bereits in Aufgabe 19 bestimmt.

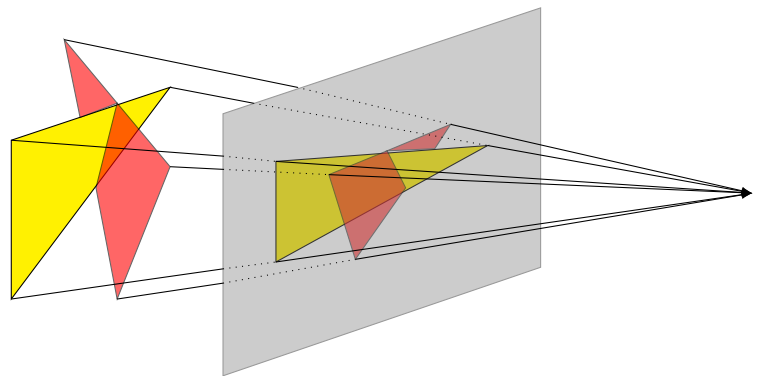
5.5.3 Projektionen

Die üblichen Abbildungen beim Erstellen zweidimensionaler Bilder von räumlichen Objekten sind Projektionen. Die wichtigsten Projektionen sind die Parallel- und die Zentralprojektion.

Parallelprojektion (auch Kavalierprojektion)



Zentralprojektion

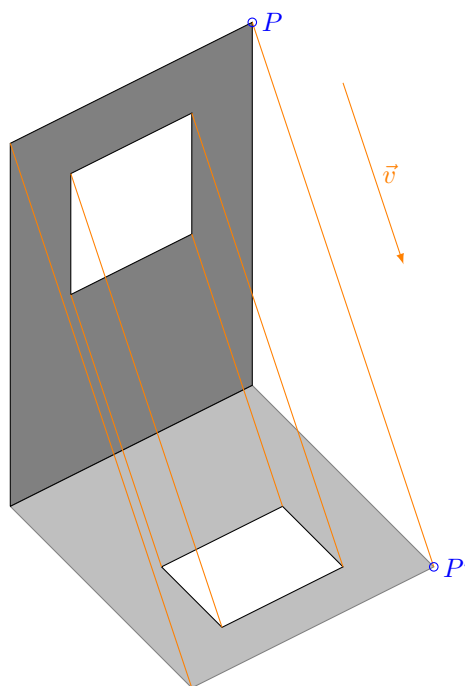


Wie man den Bildern entnehmen kann, werden Geraden durch die abzubildenden Raumpunkte gezogen. Die Schnittpunkte dieser Projektionsgeraden mit der Bildebene sind dann die Bildpunkte.

Bei der Parallelprojektion verlaufen alle Projektionsgeraden parallel zueinander. Bei der Zentralprojektion hingegen verlaufen alle Projektionsgeraden durch ein festes Projektionszentrum.

Parallelprojektion

Die Parallelprojektion benötigt man z.B. für das Erstellen von Schatten, denn die Sonnenstrahlen fallen parallel ein und bilden somit die Projektionsgeraden.



Die Projektionsgeraden besitzen alle den gleichen Richtungsvektor \vec{v} , während man als Stützvektor den Ortsvektor \vec{p} des abzubildenden Punktes P verwendet.

$$\vec{r} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$$

Prinzipiell kann man auf beliebige Ebenen projizieren, das Verfahren zum Erstellen der Abbildungsgleichung bleibt gleich. Hier wird nun nur die Abbildung auf die verschiedenen Koordinatenebenen gezeigt.

Wählen wir als Bildebene die $y-z$ -Ebene ($x = 0$), so ergibt sich die Schnittbedingung zwischen der Projektionsgerade und der Bildebene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente liefert $t = -\frac{x}{a}$, also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{x}{a} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y - \frac{b}{a} \cdot x \\ z - \frac{c}{a} \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Somit erhält man für die Abbildungsgleichung für die Projektion in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ auf die $y-z$ -Ebene

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Analog erhält man für die Abbildungsgleichung für die Projektion in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

auf die $x-z$ -Ebene

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

auf die $x-y$ -Ebene

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

22. Standardprojektion bei Darstellungen im dreidimensionalen Koordinatensystem

Eigentlich machen wir eine Parallelprojektion auf die $y-z$ -Ebene, wenn wir einen Körper in ein dreidimensionales Koordinatensystem einzeichnen. In dieser Aufgabe vergleichst du die gezeichneten mit den berechneten Punkten.

a) Zeichne den Würfel mit den Eckpunkten $A(0, 3, 0)$, $B(4, 0, 0)$, $C(7, 4, 0)$, $D(3, 7, 0)$, $E(0, 3, 5)$, $F(4, 0, 5)$, $G(7, 4, 5)$ und $H(3, 7, 5)$ in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein.

(x -Achse im 45° -Winkel und Verkürzungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

b) Betrachte nun die x -Achse sozusagen nicht mehr und lies die Koordinaten der Eckpunkte ab, als ob diese in der $y-z$ -Ebene liegen würden.

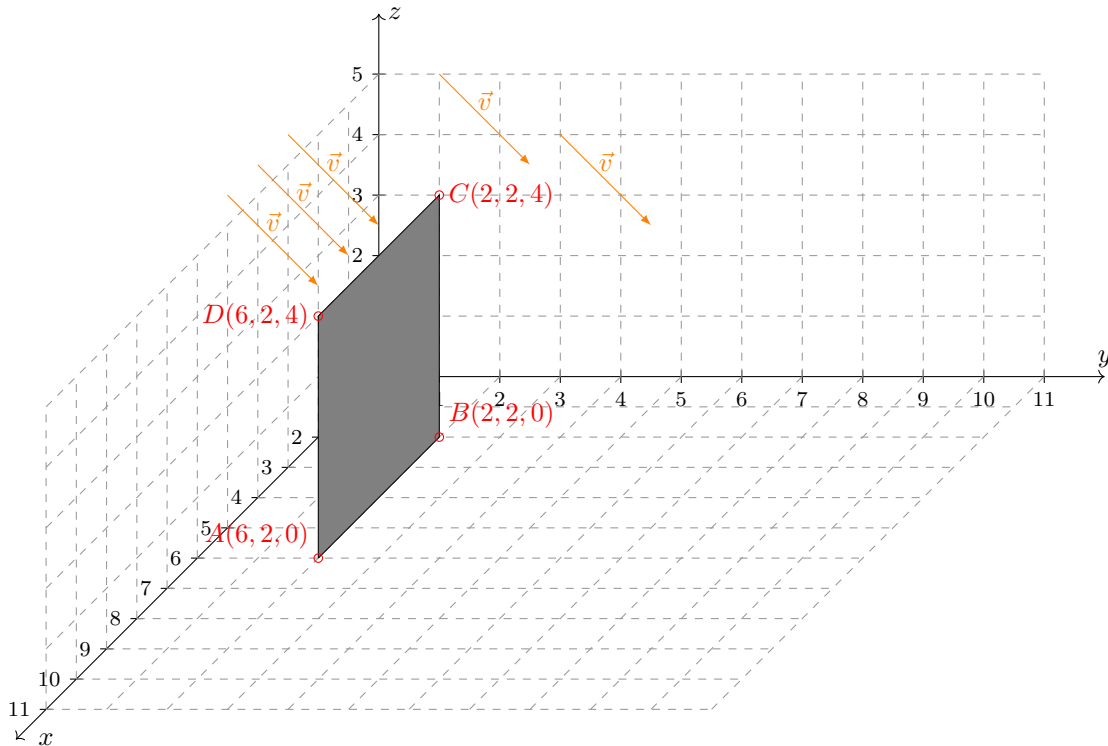
c) Benutze die Abbildungsgleichung für die Projektion in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ auf die $y-z$ -Ebene, um die

Bildpunkte der Eckpunkte zu berechnen, und vergleiche diese mit den Ergebnissen aus b).

23. Schattenwurf

Eine Mauer hat die Eckpunkte $A(6, 2, 0)$, $B(2, 2, 0)$, $C(2, 2, 4)$ und $D(6, 2, 4)$. Sonnenstrahlen mit der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ fallen auf diese Mauer.

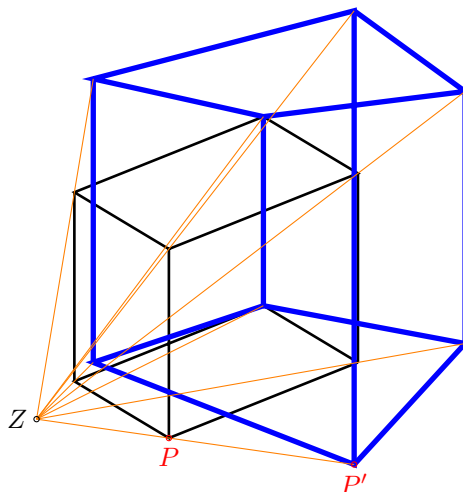
a) Zeichne den Schatten in das folgende Koordinatensystem ein.



b) Stelle die Abbildungsgleichung auf für die Projektion in Richtung \vec{v} auf die $x-y$ -Ebene und berechne damit die Bildpunkte der Ecken des Schattens. Vergleiche diese mit dem eingezeichneten Schatten.

Zentralprojektion

Auch die Zentralprojektion kann man zum Erstellen von Schattenbildern benutzen. Dann allerdings geht das Licht von einer Punktquelle aus. Kleine Leuchtquellen, wie z.B. eine Birne, kann man näherungsweise als Punktquellen betrachten. Die perspektivische Darstellung (siehe untenstehende Darstellung) benutzt auch die Zentralprojektion. Weil unser Auge im Prinzip einer Lochkamera gleicht und somit auch alle Strahlen durch ein Zentrum - die Pupille - treffen, ist das, was wir sehen also eine Zentralprojektion.



Wenn man die Projektion (blau) betrachtet, dann erkennt man hier schon, dass parallele Geraden nicht mehr auf parallele Geraden abgebildet werden. Die Zentralprojektion gehört darum nicht zu den linearen Abbildungen, die im nächsten Teilkapitel behandelt werden und es wird deswegen nicht gelingen, diese mit einer Abbildungsmatrix zu beschreiben:

Auf die gleiche Weise, wie bei der Parallelprojektion vorgegangen wurde, leitet man die Formel für die Berechnung des Bildpunktes P' eines beliebigen Punktes P im Raum her, in dem man die Gerade durch das Zentrum $Z(a, b, c)$ und den Punkt $P(x, y, z)$ mit der Bildebene schneidet.

Die Projektionsgerade (ZP) lässt sich schreiben als

$$\vec{r} = \vec{p} + t \cdot (\vec{p} - \vec{z})$$

Projizieren wir wieder auf die $y-z$ -Ebene ($x = 0$), so ergibt sich $t = \frac{-x}{x-a} = \frac{x}{a-x}$, also erhält man für die Koordinaten des Bildpunktes $P'(x', y', z')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{x}{a-x} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x(a-x)}{a-x} \\ \frac{y(a-x)}{a-x} \\ \frac{z(a-x)}{a-x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x(x-a)}{a-x} \\ \frac{x(y-b)}{a-x} \\ \frac{x(z-c)}{a-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{xa-x^2+x^2-xa}{a-x} \\ \frac{ya-yx+xy-xb}{a-x} \\ \frac{za-zx+xz-xc}{a-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ay-bx}{a-x} \\ \frac{az-cx}{a-x} \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, können die Komponenten des Bildvektors nicht mehr als Linearkombination der Komponenten x, y, z geschrieben werden und somit nicht mit einer Abbildungsmatrix berechnet werden. Die Zentralprojektion ist deswegen keine lineare Abbildung. Was genau wir als lineare Abbildung bezeichnen, wird im nächsten Kapitel 5.5.4 beschrieben. Mit der Zentralprojektion beschäftigt sich die projektive Geometrie.

5.5.4 Lineare Abbildungen

Eine Gleichung heisst linear in der Variable x , wenn die Variable x nur in der ersten Potenz in der Gleichung vorkommt.

Beispiel: lineare Gleichungen

$3x + 5 = 7$ ist eine lineare Gleichung

$4x^2 + 3x + 6 = 0$ ist keine lineare Gleichung, da x^2 vorkommt

$4x - 3y = 6$ ist eine Gleichung, die linear in x und y ist

$2x - 5y^7 = 2$ ist eine Gleichung, die zwar linear in x , aber nicht linear in y ist

In Kapitel 1.7 wurde beschrieben, wie man lineare Gleichungssysteme mit Hilfe einer Matrix schreiben kann.

Beispiel: lineare Gleichungssysteme und Matrizen

$$x + 2y + 4z = 1$$

$$-x + y + 3z = 4$$

$$3x + y - 2z = 3$$

kann man als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Dieses Prinzip übertragen wir auf die linearen Abbildungen.

Lineare Abbildung

Eine Zuordnung, die jedem Punkt P in \mathbb{R}^n einen Bildpunkt P' in \mathbb{R}^m zuordnet, heisst **lineare Abbildung**, wenn es eine $m \times n$ -Matrix A gibt, so dass für die Ortsvektoren \vec{p} und \vec{p}' gilt

$$\vec{p}' = A \cdot \vec{p}$$

Die Matrix A heisst die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung.

24. Lineare Abbildungen

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Gib gegebenenfalls die Abbildungsmatrix an.

$$\begin{aligned} \text{a) } x' &= 2x - z \\ y' &= 2y \\ z' &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x' &= 2x^2 \\ y' &= 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x' &= x + 1 \\ y' &= y + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } x' &= 3x \\ y' &= e^{x+y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x' &= 0 \\ y' &= 0 \\ z' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } x' &= 1 \\ y' &= 2 \\ z' &= 3 \end{aligned}$$

Bemerkung: Eine Affinität ist eine bijektive Abbildung eines Vektorraumes auf sich selbst, die man als $\vec{x}' = T \cdot \vec{x} + \vec{b}$ schreiben kann, wobei T eine $n \times n$ -Matrix ist. Die zu Anfang des Kapitels beschriebenen Abbildungen sind also Affinitäten, aber im Allgemeinen nicht linear (wegen $+\vec{b}$).

Eigenschaften von linearen Abbildungen

Es sei A ein Matrix, t ein Skalar und \vec{u} und \vec{v} Vektoren.

Dann gilt das

so genannte **gemischte Assoziativgesetz**

$$A \cdot (t \cdot \vec{v}) = t \cdot (A \cdot \vec{v})$$

und das **Distributivgesetz**

$$A \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{v}$$

Für die zugrundeliegende Abbildung mit der Abbildungsmatrix A bedeutet das Assoziativgesetz, dass aus $\vec{v} \mapsto \vec{v}'$ stets folgt, dass $t \cdot \vec{v} \mapsto t \cdot \vec{v}'$. Diese Eigenschaft einer Abbildung nennt man auch **homogen**.

Für die zugrundeliegende Abbildung mit der Abbildungsmatrix A bedeutet das Distributivgesetz, dass aus $\vec{u} \mapsto \vec{u}'$ und $\vec{v} \mapsto \vec{v}'$ folgt, dass $\vec{u} + \vec{v} \mapsto \vec{u}' + \vec{v}'$. Diese Eigenschaft einer Abbildung nennt man auch **additiv**.

Lineare Abbildungen sind also homogen und additiv.

Diese beiden Eigenschaften lassen sich zusammenfassen als $(s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v})' = s \cdot \vec{u}' + t \cdot \vec{v}'$. Was bedeutet, dass jede beliebige Linearkombination zweier Vektoren auf die entsprechende Linearkombination der Bilder dieser Vektoren abgebildet wird.

Daraus ergibt sich, dass bei linearen Abbildungen Geraden wieder auf Geraden abgebildet werden, die **Geradentreue**, und dass zueinander parallele Geraden wieder auf zueinander parallele Geraden abgebildet werden. Dies soll nun an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel: Geradentreue

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ein beliebiger Punkt auf g hat also die Koordinaten $P(-1 + t, 2 + 4t, 3 - 2t)$.

Sein Bildpunkt P' unter der linearen Abbildung mit der Abbildungsmatrix A ist also

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 + t \\ 2 + 4t \\ 3 - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

was wieder eine Gerade darstellt. Die Abbildung hat also eine Gerade wieder auf eine Gerade abgebildet. └

25. Paralleltreue

Gegeben ist die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

- Bestimme eine Geradengleichung der Gerade g durch die Punkte $P(1, 0, 3)$ und $Q(1, 1, 7)$.
- Zeige, dass die Gerade $h : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ parallel zur Geraden g ist.
- Bestimme das Bild g' der Gerade g .
- Bestimme das Bild h' der Gerade h .
- Zeige, dass g' und h' parallel sind.

Wenn A also eine beliebige 3×3 -Matrix ist und $g : \vec{p} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ eine beliebige Gerade in \mathbb{R}^3 , dann wird wegen der Linearität auch $g' : \vec{p}' = \vec{a}' + t \cdot \vec{v}'$ eine Gerade darstellen.

Einzigste Ausnahme ist, wenn $\vec{v}' = \vec{0}$. In diesem Fall ist das Bild der Gerade ein Punkt.

Ein einfach vorzustellendes Beispiel, bei dem eine Gerade auf einen Punkt abgebildet wird, ist die senkrechte Projektion auf eine zur Gerade senkrechte Ebene (Halte dazu einen Stift vor ein Auge, schliess das andere Auge und drehe den Stift so lange, bis du nur noch die Spitze siehst, aber nicht mehr die Länge des Stiftes.).

Ein Ausnahmefall befindet sich in der nächsten Aufgabe.

26. Ausnahmefall, bei dem das Bild einer Gerade ein Punkt ist

Gegeben ist die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme das Bild der Gerade $g' : \vec{r}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Geradentreue einer linearen Abbildung

Eine lineare Abbildung führt jede Gerade genau dann in eine Gerade über, wenn das Bild des Richtungsvektors vom Nullvektor verschieden ist.

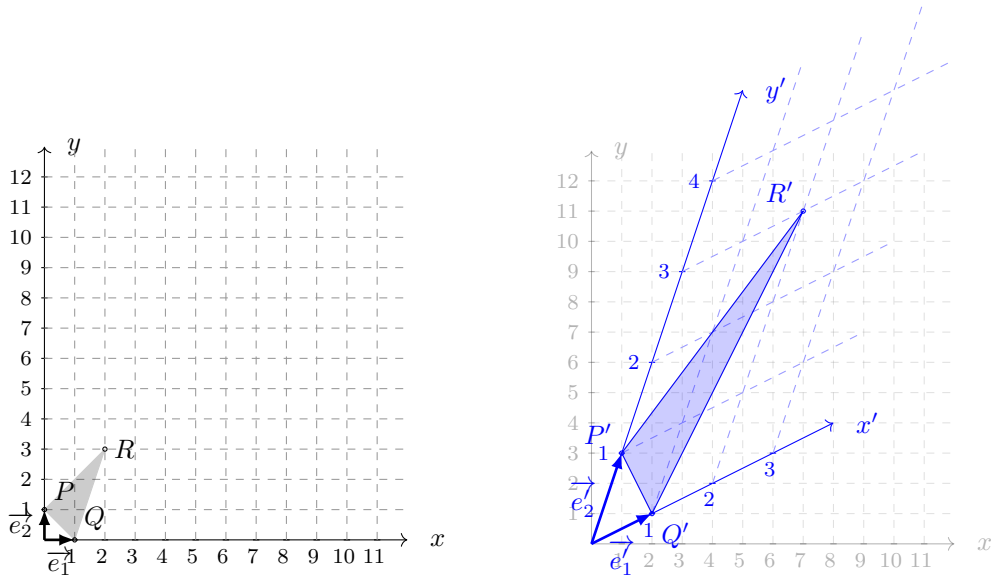
Ist das Bild des Richtungsvektors der Gerade der Nullvektor, dann überführt die lineare Abbildung die Gerade in einen Punkt.

6 Determinante

6.1 Berechnung der Determinante bei 2×2 -Matrizen

Beispiel

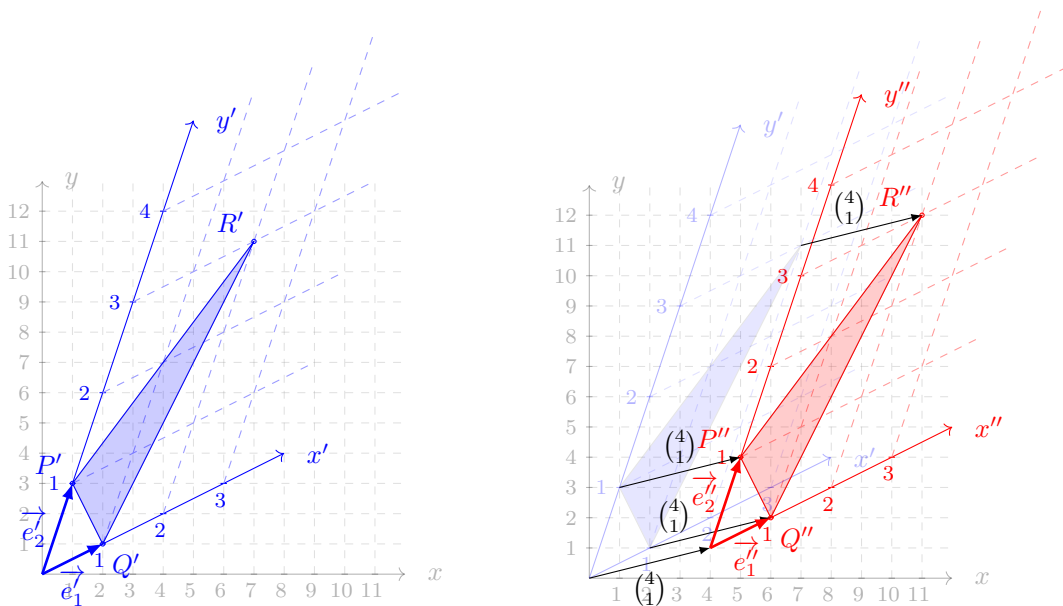
Die affine Abbildung mit der Abbildungsgleichung $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ bildet das Dreieck PQR mit $P(0, 1)$, $Q(1, 0)$ und $R(2, 3)$ auf das Dreieck $P'Q'R'$ mit $P'(1, 3)$, $Q'(2, 1)$ und $R'(7, 11)$ ab.



$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Die affine Abbildung mit der Abbildungsgleichung $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildet das Dreieck PQR auf das Dreieck $P''Q''R''$ mit $P''(5, 4)$, $Q''(6, 2)$ und $R''(11, 12)$ ab.

Das Dreieck $P''Q''R''$ geht aus dem Dreieck $P'Q'R'$ durch Verschiebung um den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ hervor.



$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Beispiel zeigt, dass der Flächeninhalt einer abgebildeten Figur nur von der Abbildungsmatrix (M , hier $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$) abhängt und nicht von der Verschiebung des Ursprungs (\vec{c} , hier $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Wir wollen nun den Faktor berechnen, um den sich die Fläche durch die Abbildung verändert. Dazu schauen wir an, wie das Einheitsquadrat unter der Abbildung mit der Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

seinen Flächeninhalt verändert.

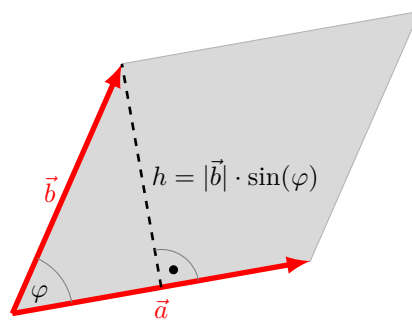
- Das Einheitsquadrat wird durch eine Abbildung mit der gegebenen Abbildungsmatrix auf ein Parallelogramm abgebildet. Berechne mit Hilfe einer Zeichnung jeweils den Flächeninhalt des Parallelogramms nach der Abbildung.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Gegeben sei folgendes Parallelogramm, welches durch die Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird



Allgemein gilt für den Flächeninhalt A eines Parallelogramms:

$$A = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

Für die Höhe h gilt (siehe Zeichnung):

$$h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

Für die Berechnung brauchen wir Folgendes:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Skalarprodukt: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

$$\begin{aligned}
A &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \\
A^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi) \\
A^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2(\varphi)) \\
A^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi) \\
A^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi))^2 \\
A^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\
A^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \\
A^2 &= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 - a_1^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - a_2^2b_2^2 \\
A^2 &= a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \\
A^2 &= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
A &= |a_1b_2 - a_2b_1|
\end{aligned}$$

Man kann das ganze auch in den dreidimensionalen Raum einbetten mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann nutzt man das Vektorprodukt um die Fläche zu berechnen

$$\begin{aligned}
A &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \\
A &= |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} \\
A &= |a_1b_2 - a_2b_1|
\end{aligned}$$

Da dieser Wert sich als sehr wichtig erweisen wird, bekommt er einen neuen Namen.

Determinante

Die Determinante einer Matrix M gibt den Faktor an, um den sich der Flächeninhalt (in 2 Dimensionen, in 3 Dimensionen das Volumen usw.) unter der Abbildung vervielfacht.

Wir schreiben $\det(M)$ oder $|M|$.

Berechnungsmethoden findest du auf S. 31 des Formeln, Tabellen, Begriffe

Von einer 2×2 -Matrix berechnet sich die Determinante, wie wir es gerade herausgefunden haben:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

2.

- a) Berechne die Determinanten der Matrizen A und B , sowie von $A \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

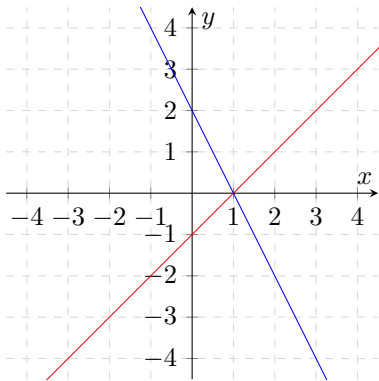
- b) Stelle eine Vermutung auf, was die Determinante des Produkts $\det(A \cdot B)$ betrifft, denke hierbei auch an den Faktor, um den sich der Flächeninhalt des Einheitsquadrates verändert. Zeige dies allgemein für 2×2 -Matrizen.
c) Berechne die Determinanten der Matrizen A und A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- d) Stelle eine Vermutung auf, was die Determinante der inversen Matrix $\det(A^{-1})$ betrifft, denke hierbei auch an den Faktor, um den sich der Flächeninhalt des Einheitsquadrates verändert. Zeige dies allgemein für 2×2 -Matrizen.

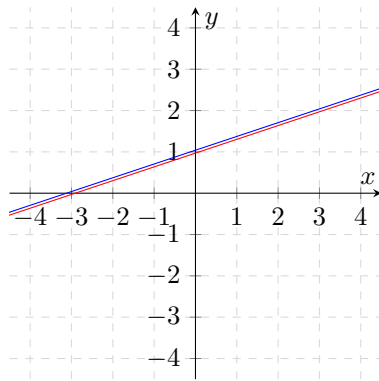
6.2 Zusammenhang zwischen Determinanten und Gleichungssystemen

Bei linearen 2×2 Gleichungssystemen haben wir 3 mögliche Fälle für die Lösungsmenge



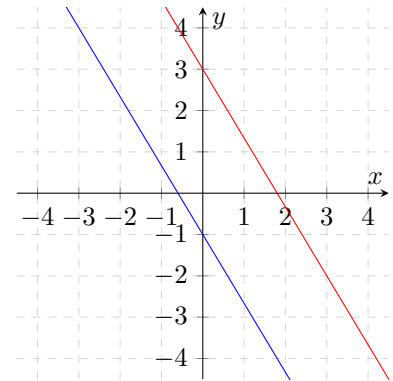
die beiden Geraden haben genau einen Schnittpunkt

$$\mathbb{L} = \{(x, y)\}$$



die beiden Geraden sind identisch unendlich viele Schnittpunkte

$$\mathbb{L} = \{(x, y) | y = mx + q\}$$



die beiden Geraden sind parallel keinen Schnittpunkt

$$\mathbb{L} = \{\}$$

3. Gib jeweils die Lösungsmenge des 2×2 -LGS an und bestimme die Determinante der Koeffizientenmatrix.

a)

$$\begin{aligned} 8x - y &= 0 \\ 6x - 3y &= -9 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 6x - 3y &= 3 \\ -4x + 2y &= -2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y &= 0 \\ -x - y &= 1 \end{aligned}$$

Beim Lösen der letzten Aufgabe sollte dir klar geworden sein, dass im Normalfall (d.h. wenn die Geraden sich in einem Punkt schneiden) die Determinante $\neq 0$ ist und in den beiden Sonderfällen (identisch, parallel), die Determinante 0 ist.

Ist die Determinante 0, so nennt man die Matrix **singulär**, sonst **regulär**.
Reguläre Matrizen sind **invertierbar**, singuläre nicht.

Dies kann man leicht verstehen, wenn man sich klar macht, dass bei einer Abbildungsmatrix mit Determinante 0 das Einheitsparallelogramm den Flächeninhalt 0 hat, d.h. beide Achsen fallen bei der zur Matrix gehörenden Abbildung zusammen. Also kann man auch nicht rekonstruieren, woher ein Punkt kam.

4. Anzahl Lösungen eines linearen Gleichungssystems

Entscheide über die Berechnung der Determinante, ob das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung hat oder ob einer der beiden Sonderfälle vorliegt.

Die beiden Sonderfälle sind: unendlich viele Lösungen (Geraden sind identisch) oder keine Lösung (Geraden sind parallel).

a)

$$\begin{aligned} -x - y &= 4 \\ 3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ -9x + \frac{9}{2}y &= -\frac{27}{2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 9x + 3y &= 15 \end{aligned}$$

6.3 Interpretation des Vorzeichens der Determinante bei Abbildungsmatrizen

5. Orientierung

Zeichne jeweils die Achsen des neuen Koordinatensystems nach der Abbildung mit der gegebenen Abbildungsmatrix und berechne die Determinante.

Lässt sich ein Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der Determinante und der Orientierung des Koordinatensystems erkennen? Kannst du dies begründen?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ist die Determinante der Abbildungsmatrix negativ, so ist die Abbildung **orientierungsumkehrend**, wenn sie positiv ist, ist die Abbildung **orientierungserhaltend**.

Ist die Determinante der Abbildungsmatrix 0, so ist die Abbildung **nicht umkehrbar**.

6. Umkehrbarkeit

Für welchen Wert von t ist die zur folgenden Matrix gehörende Abbildung nicht umkehrbar?

Begründe deine Antwort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & t \end{pmatrix}$$

7. 2×2 -Matrizen, Klassifikation

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Gib an, welche der obigen Matrizen eine orientierungstreue/-umkehrende Abbildung beschreiben.

6.4 Berechnung der Determinanten von $n \times n$ -Matrizen

Bei 3×3 -Matrizen kann man das **Verfahren von Sarrus** anwenden (siehe FoTaBe S. 31).

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & + & & + & \\ a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \swarrow & & \swarrow & & \searrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \searrow & & \searrow & & \swarrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \\ & - & & - & & - & & & \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & + & & + & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 \\ & \searrow & & \swarrow & & \swarrow & & \searrow & \\ 4 & & 5 & & 6 & & 4 & & 5 \\ & \swarrow & & \searrow & & \searrow & & \swarrow & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 7 & & 8 \\ & - & & - & & - & & & \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 = 0$$

8. 3×3 -Matrizen

i) Berechne jeweils die Determinante der folgenden Matrizen.

a) $\det \begin{pmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

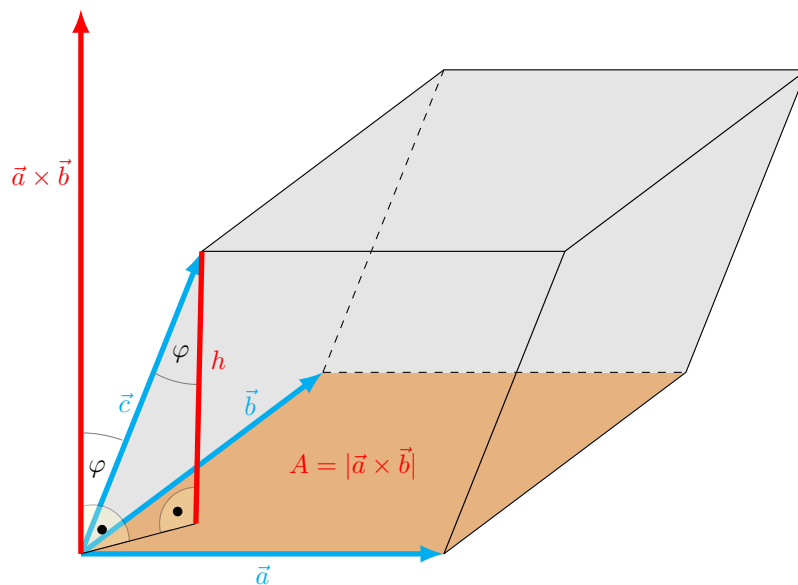
f) $\det \begin{pmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{pmatrix}$

ii) Gib an, welche der Matrizen aus Aufgabenteil a) singular und welche regulär sind.

iii) Welche Matrizen beschreiben eine orientierungstreue/-umkehrende Abbildung.

Spatprodukt

Als **Spat** (Parallelfach oder Parallelepipid; schiefes Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist) bezeichnet man einen dreidimensionalen Körper, der von den drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.



Als **Spatprodukt** bezeichnet man $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.
(siehe Formeln, Tabellen, Begriffe S. 105)

Die Vektoren können zyklisch vertauscht werden ohne dass sich der Wert des Spatprodukts ändert.

Das **Volumen des Spats** berechnet sich mit

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|$$

Das Spatprodukt liefert also zusätzlich zum Volumen auch noch die Orientierung: positives Spatprodukt bedeutet, dass die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} im Gegenuhrzeigersinn angeordnet sind, also ein rechtsorientiertes System bilden negatives Spatprodukt bedeutet, dass die drei Vektoren im Uhrzeigersinn angeordnet sind, d.h. ein linksorientiertes System bilden

Dass $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ ist, kann man über die Koeffizienten leicht zeigen:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Formel für das Volumen kann man mit geometrischen Überlegungen und der Definition von Skalar- und Vektorprodukt herleiten:

Allgemein gilt für ein Prisma

$$\text{Volumen} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

Die Grundfläche G kann man mit dem Betrag des Vektorprodukts berechnen:

$$G = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Die Höhe h berechnet sich mit

$$h = |\vec{c}| \cdot \cos(\varphi)$$

Man erhält für das Volumen V also

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\varphi),$$

wobei φ der Winkel zwischen $(\vec{a} \times \vec{b})$ und \vec{c} ist. Somit ist mit der Definition des Skalarprodukts

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

9. Volumen des Spats

Berechne das Volumen des Spats, der durch die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

10. Volumen einer Pyramide

Berechne das Volumen der Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ mit $A(12, -6, 2)$, $B(10, 2, 0)$, $C(4, 2, 6)$ und $D(6, -6, 8)$ und Spitze $S(16, 2, 12)$.

11. Volumen eines Tetraeders

Berechne das Volumen des Tetraeders $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$, $C(0, 1, -3)$ und $D(-1, 1, 2)$.

Für **mehr als 3 Dimensionen** muss man das **Entwicklungsverfahren** (siehe Formeln, Tabellen, Begriffe S. 31) anwenden. Bei diesem Verfahren solle man zuerst nach der Zeile/Spalte entwickeln, die am meisten 0-en hat, damit es schneller zu berechnen geht.

Laplace Entwicklungssatz

Zur Berechnung von Determinanten kann man ... entwickeln.

$$- \text{ nach der } i\text{-ten Zeile } |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

$$- \text{ nach der } j\text{-ten Spalte } |A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Dabei ist a_{ij} das Schnittpunktelement, $(-1)^{i+j}$ der Vorzeichenfaktor und D_{ij} die Unterdeterminante, die man erhält, wenn man die i -te Zeile und die j -te Spalte streicht.

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Man kann nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln, da hier keine 0-en sind, bringen alle Zeilen/Spalten gleich viel Arbeit. Es werden nun drei Berechnungen für die selbe Matrix gemacht, die zum gleichen Ergebnis führen müssen.

Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 34 - 3 \cdot 13 + 5 \cdot 23 = 110$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 10 + 7 \cdot 20 - 10 = 110$$

Entwicklung nach der dritten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 23 - 1 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 110$$

└

12. $n \times n$ -Matrizen

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & -9 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

13. Bestimme x .

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

6.5 Existenz der Determinante: Die Leibniz Formel

Bisher haben wir nur gesehen, wie wir die Determinante einer $n \times n$ Matrix mithilfe einer rekursiven Darstellung berechnen können. Tatsächlich ist es möglich eine explizite Formel aufzustellen. Dazu benötigen wir jedoch ein paar Bausteine.

6.5.1 Die symmetrische Gruppe

Die *symmetrische Gruppe* der Ordnung n ist die Menge S_n , deren Elemente umkehrbare Abbildungen der Form $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ sind. Wir nennen ein Element $\sigma \in S_n$ eine *Permutation*. Eine solche Permutation vertauscht im Prinzip die Zahlen $1, \dots, n$, sodass diese in einer anderen Reihenfolge gegeben sind.

Beispiel

Angenommen wir haben die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$, d.h. wir setzen $n = 4$. Dann könnte ein Element von S_4 die Abbildung sein, die folgende Vertauschungen bewirkt:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 3 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 4 \\ 4 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

Somit wird die Reihenfolge $1, 2, 3, 4$ auf die Reihenfolge $3, 1, 4, 2$ abgebildet. ┌

Tatsächlich ist es so, dass die symmetrische Gruppe der Ordnung n genau $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Elemente hat. Einer Permutation $\sigma \in S_n$ kann man auch ein Vorzeichen, also positiv oder negativ, zuordnen. Wir können also eine Abbildung

$$\text{sign}: S_n \rightarrow \{-1, 1\}$$

definieren. Diese Abbildung ist definiert durch $\text{sign}(\sigma) = 1$, falls σ eine *gerade* Anzahl an Vertauschungen bewirkt und $\text{sign}(\sigma) = -1$, falls σ eine *ungerade* Anzahl an Vertauschungen bewirkt.

Beispiel

Für die Permutation σ im vorherigen Beispiel gilt also

$$1 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$$

Somit haben wir 4 Vertauschungen und damit eine gerade Anzahl und somit ist $\text{sign}(\sigma) = 1$. ┌

Beispiel

Angenommen wir haben eine Permutation $\sigma \in S_4$ wie folgt:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 1 \\ 4 &\mapsto 4 \end{aligned}$$

Dann haben wir 3 Vertauschungen und somit ist $\text{sign}(\sigma) = -1$. ┌

6.5.2 Die Leibniz Formel

Leibniz Formel

Für eine quadratische $n \times n$ Matrix A , ist die Determinante gegeben durch

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Beispiel

Angenommen wir haben eine 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Da $n = 3$ ist, wissen wir, dass es $3! = 6$ Permutationen in S_3 geben muss. Die Permutationen sind wie folgt:

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) &\mapsto (1, 2, 3) \\ (1, 2, 3) &\mapsto (1, 3, 2) \\ (1, 2, 3) &\mapsto (2, 1, 3) \\ (1, 2, 3) &\mapsto (2, 3, 1) \\ (1, 2, 3) &\mapsto (3, 1, 2) \\ (1, 2, 3) &\mapsto (3, 2, 1) \end{aligned}$$

Dann gilt mit der Formel von Leibniz für die Produkte der Einträge jeweils

$$\begin{aligned} &+ a_{11}a_{22}a_{33} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} \\ &+ a_{12}a_{23}a_{31} \\ &+ a_{13}a_{21}a_{31} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Daraus folgt also die Determinante

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Das entspricht genau dem Resultat aus dem Verfahren von Sarrus. └

Wir haben bereits gesehen, dass $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ist. Nun möchten wir diese Beziehung mithilfe der Formel von Leibniz beweisen. Wir betrachten zwei $n \times n$ Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$. Dabei bezeichne wir das Produkt mit $C = AB = (c_{ij})$, wobei $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$. Somit erhalten wir mit der Formel von Leibniz

$$\begin{aligned} \det(C) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} b_{j_1\sigma(1)} \sum_{j_2=1}^n a_{2j_2} b_{j_2\sigma(2)} \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{nj_n} b_{j_n\sigma(n)} \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^n a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) b_{j(1)\sigma(1)} b_{j(2)\sigma(2)} \cdots b_{j(n)\sigma(n)} \end{aligned}$$

Ist nun $j = (j_1, \dots, j_n)$ keine Permutation von $\{1, \dots, n\}$, so ist der entsprechende Summand

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) b_{j(1)\sigma(1)} b_{j(2)\sigma(2)} \cdots b_{j(n)\sigma(n)}$$

gleich Null, da diese Matrix nun zwei gleiche Zeilen hat. Somit beschränken wir uns nur auf Permutationen $j = (j(1), \dots, j(n))$ in S_n . Wenn wir nun die Faktoren $b_{j(1)\sigma(1)}, \dots, b_{j(n)\sigma(n)}$ umordnen, erhalten wir $b_{1,j^{-1}\sigma(1)}, \dots, b_{n,j^{-1}\sigma(n)}$. Das ausserdem $\text{sign}(j^{-1}) = \text{sign}(j)$, folgt dass

$$\begin{aligned} \det(C) &= \sum_{j \in S_n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \text{sign}(j) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(j^{-1}) \text{sign}(\sigma) b_{1,j^{-1}\sigma(1)} b_{2,j^{-1}\sigma(2)} \cdots b_{n,j^{-1}\sigma(n)} \\ &= \sum_{j \in S_n} \text{sign}(j) a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \det(B) \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

14. Finde alle Permutationen in

- a) $S_2 = \{\sigma: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}\}$
- b) $S_4 = \{\sigma: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}\}$

15. Berechne das Vorzeichen der folgenden Permutationen:

- a) $\sigma: (1, 2, 3, 4) \mapsto (2, 1, 3, 4)$
- b) $\sigma: (1, 2, 3, 4) \mapsto (4, 1, 3, 2)$
- c) $\sigma: (1, 2, 3, 4) \mapsto (1, 2, 3, 4)$

16. Berechne die Determinante einer 2×2 Matrix

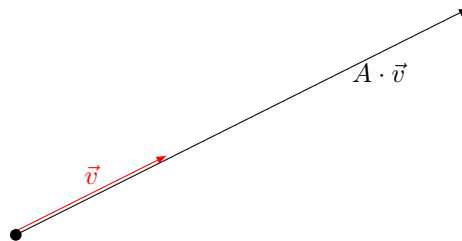
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mithilfe der Leibniz Formel.

7 Eigenwerte und Eigenräume

7.1 Berechnung von Eigenwerten und Eigenraumbasen

Oft gibt es für Abbildungen der Form $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ Vektoren für die \vec{v} und $A \cdot \vec{v}$ lineare Vielfache voneinander sind.



Solche Vektoren ergeben sich z.B. bei der Untersuchung von Schwingungen, Druck, in der Elektrizitätslehre, bei chemischen Reaktionen, sowie bei der Betrachtung von Problemen aus der Quantenmechanik, Genetik, Ökonomie und selbstverständlich in der Geometrie. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie man diese Vektoren findet.

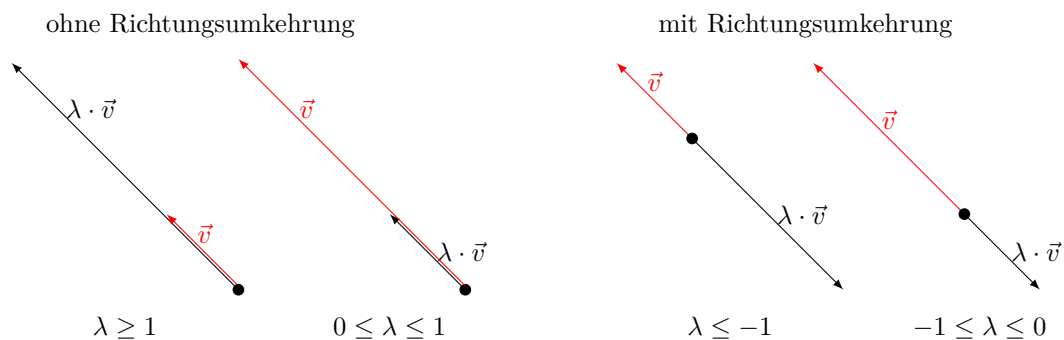
Eigenwert, Eigenvektor

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Ein von Null verschiedener Vektor \vec{v} bezeichnet man als **Eigenvektor** von A , wenn $A \cdot \vec{v}$ ein skalares Vielfaches von \vec{v} ist, d.h.

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

für ein Skalar λ . Die Zahl λ bezeichnet man als **Eigenwert** von A zum Eigenvektor \vec{v} .

Im zwei- und dreidimensionalen Raum kann man Eigenwerte und Eigenvektoren geometrisch interpretieren. Ist \vec{v} ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , so führt die Multiplikation von \vec{v} mit A , d.h. die Abbildung von \vec{v} auf $A \cdot \vec{v}$ zu einer Streckung (oder Stauchung) von \vec{v} , wobei bei negativem λ noch eine Richtungsumkehrung dazukommt.



Beispiel

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = 2$, denn

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{v}$$

Um die Eigenwerte einer $n \times n$ -Matrix A zu bestimmen, schreiben wir die Gleichung etwas um:

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

$$A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

damit wir \vec{v} ausklammern können, müssen wir $\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot E \cdot \vec{v}$ nutzen, damit man in der Klammer zwei Matrizen voneinander subtrahiert

$$A \cdot \vec{v} - \lambda \cdot E \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Damit λ ein Eigenwert von A ist, muss die Gleichung eine nicht triviale Lösung (d.h. $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$) besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

Diese Gleichung heisst **charakteristische Gleichung** von A ; ihre Lösungen sind die Eigenwerte von A . Berechnet man diese Determinante, so ergibt sich ein Polynom in λ , welches als **charakteristisches Polynom** von A bezeichnet wird.

Das charakteristische Polynom einer $n \times n$ -Matrix hat maximal n Lösungen für λ und somit hat eine $n \times n$ -Matrix maximal n Eigenwerte mit den dazugehörigen Eigenvektoren. Angenommen eine Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, wobei gewisse Eigenwerte gleich sind, d.h. es gibt eine Teilmenge $\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}\}$ von $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ mit $\lambda = \lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \dots = \lambda_{i_k}$. Somit sind k Eigenwerte gleich und wir nennen diese Zahl k . Dann sagt man, dass der Eigenwert λ *algebraische Vielfachheit* k hat. Dieser Eigenwert λ hat dann für uns jeweils k linear unabhängige Eigenvektoren.⁶ Wenn ein Eigenwert λ algebraische Vielfachheit k hat, heisst das, dass λ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Wenn wir die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und die dazugehörigen Eigenvektoren berechnet haben, können wir den Untervektorraum von \mathbb{R}^n betrachten, der von den Eigenvektoren erzeugt wird, d.h. die lineare Hülle der Eigenvektoren. Wir nennen diese lineare Hülle den *Eigenraum* zum Eigenwert λ_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ und bezeichnen ihn mit

$$\text{Eig}(\lambda_i)$$

Wenn $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ die jeweiligen Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind, dann gilt

$$\text{Eig}(\lambda_i) = \text{span}(\vec{v}_i)$$

Falls $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_k} = \lambda$, dann gilt

$$\text{Eig}(\lambda) = \text{span}(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k})$$

Wir nennen jeweils $\dim \text{Eig}(\lambda)$ die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ .

Beispiel: 3x3 mit 3 Eigenwerten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1 - \lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$$

Die Eigenwerte von A sind dann die Lösungen der Gleichung $-\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$$

Nach der Bestimmung der Eigenwerte, wollen wir nun auch die zugehörigen Eigenvektoren bestimmen.

Die Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ sind die von Null verschiedenen Vektoren \vec{v} , die die Gleichung $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ erfüllen.

Die entsprechenden Vektoren bilden eine Basis des Eigenraums von A .

⁶Das ist nicht immer der Fall, jedoch betrachten wir in diesem Themenheft nur diesen Fall. Siehe auch Fussnote 7.

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

kann man umschreiben zu:

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = 0$$

d.h. für den Eigenwert $\lambda = 0$ ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Lösung erhält man:

$$x_v = -\frac{10}{11}z_v, y_v = -\frac{3}{11}z_v, z_v = z_v$$

Damit sind die Eigenvektoren von A zu $\lambda = 0$ die von Null verschiedenen Vektoren $k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{10}{11} \\ -\frac{3}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Da jedes Vielfache eines Eigenvektors wieder ein Eigenvektor zum selben Eigenwert ist, kann man ein beliebiges

Vielfaches wählen, um schöne Zahlen zu erhalten, z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$

Für $\lambda = 1$ erhält man analog zu oben einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so dass der Eigenraum zu $\lambda = 1$ den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

als Basis hat.

Für $\lambda = -2$ erhält man analog zu oben einen Eigenvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, so dass der Eigenraum zu $\lambda = -2$ den Vektor

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Basis hat. └

Beispiel: 3x3-Matrix mit 2 Eigenwerten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$ und somit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

Für $\lambda_1 = 1$ erhält analog zum letzten Beispiel

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn man dieses Gleichungssystem löst, erhält man:

$$x_v = -2z_v, y_v = z_v, z_v = z_v$$

Also ist der Eigenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda_2 = 2$ erhält man analog zum letzten Beispiel

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn man dieses Gleichungssystem löst, erhält man:

$$x_v = -z_v, y_v = y_v, z_v = z_v$$

In diesem Beispiel gibt es also zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$,

nämlich $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit ist $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des Eigenraumes zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$

Dies bedeutet, dass jede Linearkombination von diesen beiden Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ wieder ein Eigenvektor ist, z.B.:

$$v_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot v_{\text{neu}}$$

—

1. Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenraumbasen.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Es sei $A_t = \begin{pmatrix} -1 & 3t \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

- Für welches t hat die Matrix A_t genau einen Eigenwert? Gib den Eigenwert an und die dazu gehörende Eigenraumbasis.
- Für welches t hat die Matrix A_t keine Eigenwerte?
- Für welches t hat die Matrix A_t zwei verschiedene Eigenwerte? Gib diese Eigenwerte in Abhängigkeit von t an.
- Bestimme in c) den zweiten Eigenwert, wenn -1 ein Eigenwert ist. Und gib jeweils die dazugehörenden Eigenraumbasen an.

7.2 Eigenwertbestimmung durch Iteration

Dieses Unterkapitel ist von Thomas Wihler, Universität Bern, leicht abgeändert aus dem Buch "Mathematik für Naturwissenschaften: Einführung in die lineare Algebra", erschienen beim Haupt-Verlag, 2012.

In praktischen Anwendungen ist die numerische Berechnung (Octave ist ein numerisches Programm) der Eigenwerte mit Hilfe der charakteristischen Gleichung generell zu vermeiden. Dies liegt daran, dass die Gleichung typischerweise eine erhöhte Gefahr von Rundungsfehlern mit sich bringt.

Man sieht dies an folgendem Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-10} \\ 10^{-10} & 1 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist also:

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1 - 10^{-20}) = 0$$

d.h. $\lambda_1 = 1 + 10^{-10}$, $\lambda_2 = 1 - 10^{-10}$

Numerische Software (wie Octave) basiert oftmals auf 15 Stellen (*double*). Daraus resultiert, dass $1 - 10^{-20}$ auf 1 gerundet wird, d.h. Octave erhält für das charakteristische Polynom:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

was zu den falschen Eigenwerten $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ führt.

3. Rundungsproblem

Berechne in Octave das charakteristische Polynom (Syntax: `p=poly(A)`, `roots(p)`) und die Eigenwerte von A .

Es gibt numerische Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte, die auf anderen Lösungsansätzen beruhen. In der Praxis werden oft Iterationsmethoden oder geeignete Matrixfaktorisierungen eingesetzt. Du wirst nun ein Iterationsverfahren kennenlernen, welches weniger anfällig auf Rundungsfehler ist.

Wir betrachten dazu folgendes Beispiel (diskreter Markovprozess oder Markovkette):

Beispiel

Wer den Geysir Old Faithful im Yellowstone Nationalpark beobachtet, wird feststellen, dass er seine Fontänen in unregelmässigen Abständen hochsteigen lässt.

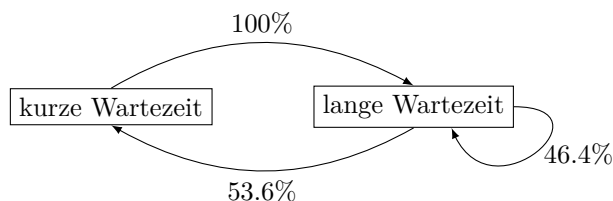


Wer aber die Wartezeiten zwischen zwei Ausbrüchen grob in kurz und lang einteilt und damit etwas Statistik treibt, wird bemerken, dass auf ein kurzes Intervall immer ein langes folgt, nicht aber umgekehrt. Genauer gilt:

Die Chance (Wahrscheinlichkeit), dass auf eine kurze Wartezeit eine lange folgt, ist 100%.

Die Chance, dass auf eine lange Wartezeit eine kurze folgt, ist 53.6%, während sich mit einer Chance von 46.4% wiederholt ein langes Intervall anschliesst.

Diese Verhaltensweise lässt sich in Form eines Übergangsgraphen darstellen:



Die Übergangsmatrix ist also:

$$S = \begin{array}{c} K \quad L \\ \begin{array}{l} K \\ L \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.536 \\ 1 & 0.464 \end{pmatrix},$$

Wir bezeichnen die Chance für eine kurze respektive lange Wartezeit mit k und l . Soeben wurde ein langer Abstand zwischen zwei Ausbrüchen beobachtet. Dies entspricht den Wahrscheinlichkeiten

$$k_0 = 0\% = 0, \quad l_0 = 100\% = 1,$$

wobei wir den Index "0" benutzen, um den Startpunkt der Beobachtungen zu markieren. Die darauf folgenden Wartezeiten nummerieren wir dementsprechend mit 1, 2, 3, ...

Somit ergibt sich für k_1 und l_1 :

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} k_0 \\ l_0 \end{pmatrix}$$

oder eben nach n Wiederholungen:

$$\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ l_{n+1} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} k_n \\ l_n \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also einen Iterationsprozess (an der Uni wirst du diesen Typ als Markovprozess oder Markovkette kennenlernen).

—

4. Iterationsprozess in Octave

- Schreibe ein kleines Programm in Octave, welches dir nach Eingabe der Matrix S und der Anzahl Iterationsschritte n die iterierten Vektoren $\begin{pmatrix} k_n \\ l_n \end{pmatrix}$ ausgibt.
- Teste dein Programm für das vorhergehende Beispiel des Geysirs zur Berechnung von $\begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}$ bis $\begin{pmatrix} k_8 \\ l_8 \end{pmatrix}$ mit $k_0 = 0\% = 0, l_0 = 100\% = 1$.

Wie du siehst, stabilisiert sich der Vektor $\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ l_{n+1} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} k_n \\ l_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} k_n \\ l_n \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} k_n \\ l_n \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von S .

5. Es sei nun folgende Matrix gegeben

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Berechne für diese Matrix mit dem von dir geschriebenen Programm die Vektoren v_1 bis v_8 nach Eingabe des Startvektors $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zuerst wirst du keine Stabilisierung des Vektors bemerken.

- b) Füge nun in dein Programm eine Zeile ein, die jeweils den Vektor durch seine Länge teilt $\vec{w}_n = \frac{\vec{v}_n}{|\vec{v}_n|}$.

(Syntax: `norm(v)` berechnet die Länge eines Vektors \vec{v})

Jetzt haben wir also den gewünschten Eigenvektor gefunden, denn diese Stabilisation lässt sich zusammenfassen als:

$$\frac{\vec{v}_{n+1}}{|\vec{v}_{n+1}|} = B \cdot \frac{\vec{v}_n}{|\vec{v}_n|} = \frac{\vec{v}_n}{|\vec{v}_n|}$$

Bleibt noch die Bestimmung des Eigenwertes.

Für einen Eigenvektor wissen wir, dass gilt:

$$B \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Also ist

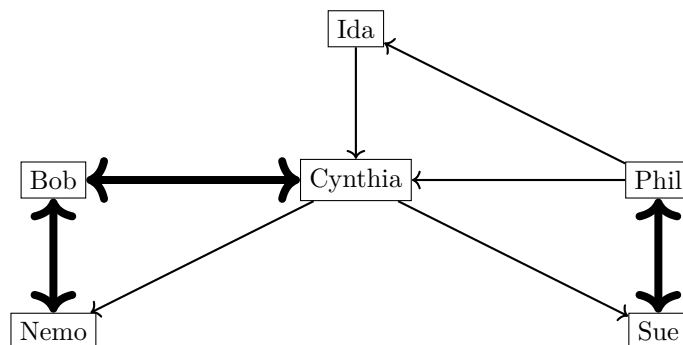
$$\lambda = \frac{|\vec{v}_{n+1}|}{|\vec{v}_n|} = \frac{|B \cdot \vec{v}_n|}{|\vec{v}_n|}$$

- c) Füge also nun nach der For-Schleife einen Programmcode ein, der den Eigenwert näherungsweise berechnet.

Mit $\lambda = \frac{|B \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

6. Anwendung der Eigenwertberechnung

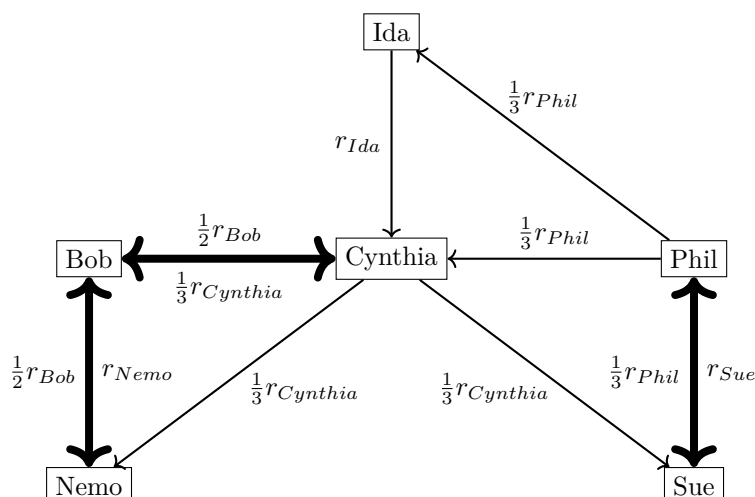
In einer Schimpansen-Population gibt es sechs Schimpansen, die regelmässig miteinander interagieren. Ein Doppelpfeil gibt eine gegenseitige Interaktion an, während ein einfacher gerichteter Pfeil angibt, dass sich nur ein Tier um das andere kümmert.



d.h. z.B. Cynthia kümmert sich um Sue, aber Sue nicht um Cynthia.

Will man in dieser Population eine Hierarchie bestimmen, so kann man ein einfaches Modell anwenden. Man weist jedem Tier eine Rangnummer r zu und jedes Tier verteilt seine Rangnummer gleichmässig auf alle Tiere, mit denen es interagiert.

Daraus ergibt sich dann folgender gerichteter Graph:



Die "Netzwerkmatrix" ist also folgendermassen:

$$P = \begin{matrix} & B & C & P & N & I & S \\ \begin{matrix} B \\ C \\ P \\ N \\ I \\ S \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Die Normierung der Vektoren (d.h. das Teilen durch ihre Länge) wie in Aufgabe 5 lässt man bei dieser Aufgabe weg (d.h. man rechnet wie in Aufgabe 4). Dies ist in der gegebenen Situation sinnvoll, da die Vektoren alle eine Komponentensumme von 1 haben.

- Bestimme den Eigenvektor von P mit dem von dir geschriebenen Programm. Starte die Iteration mit dem Vektor, der in allen Komponenten $\frac{1}{6}$ hat.
- Spiele mit der Iterationszahl und versuche so eine Rangordnung aus dem in der Aufgabe beschriebenen Netzwerk herauszulesen. (Der Schimpanse mit den höchsten Interaktionsprozenten ist der höchste in der Hierarchie der Gruppe.)

7.3 Diagonalisierung einer Matrix

Wir haben gesehen, dass wir einen Vektor jeweils in Koordinaten bezüglich einer Basis schreiben. Insbesondere können wir diese Koordinaten ändern und den Vektor bezüglich einer anderen Basis schreiben. Wir haben auch gesehen, dass wir dies mithilfe einer Transformationsmatrix machen können. Wir können jedoch auch die Komponenten einer Matrix bezüglich verschiedener Basen betrachten. Wir sagen, dass zwei quadratische $n \times n$ Matrizen A und B *ähnlich* sind, falls es eine invertierbare Matrix S gibt, mit der Eigenschaft

$$B = S^{-1}AS$$

Wenn man nun A und B als Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ interpretiert, beschreiben diese dieselbe Abbildung bezüglich verschiedener Basen.

Nun fragen wir uns, ob es möglich ist für eine $n \times n$ Matrix A eine invertierbare $n \times n$ Matrix S zu finden, so dass

$$D = S^{-1}AS$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist, d.h. D ist von der Form

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Es stellt sich heraus, dass wenn wir solch ein S finden, die Diagonaleinträge von D genau den Eigenwerten von A entsprechen. Da D ähnlich ist zu A , muss D die selben Eigenwerte wie A haben. Es gilt ausserdem, dass die Determinanten von A und D gleich sind. Das folgt aus der multiplikativen Eigenschaft der Determinante (die Determinante eines Produkts von Matrizen ist das Produkt der Determinanten der Matrizen), nämlich

$$\det(D) = \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \frac{1}{\det(S)}\det(A)\det(S) = \det(A)$$

Mithilfe des Entwicklungssatzes von Laplace, bemerken wird, dass die Determinante einer Diagonalmatrix dem Produkt der Diagonaleinträge entspricht. Das charakteristische Polynom von D ist gegeben durch

$$\det(D - \lambda \cdot E) = \det(\text{diag}(\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda)) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

Damit sind die Einträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ direkt die Eigenwerte von D und folglich auch von A .

Wir möchten nun wissen, wie wir eine solche Matrix S finden können. Dazu geht man wie folgt vor:

1. Die Eigenwerte von A werden bestimmt.
2. Zu jedem Eigenwert λ_i wird folgendes Gleichungssystem gelöst

$$(A - \lambda_i \cdot E) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

3. Falls k Eigenwerte von A gleich sind, also $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_k}$, wird es k verschiedene Basisvektoren $\{\vec{b}_{i_1}, \dots, \vec{b}_{i_k}\}$ (der Eigenräume $\text{Eig}(\lambda_{i_1}), \dots, \text{Eig}(\lambda_{i_k})$) aus dem vorherigen Gleichungssystem geben ⁷.
4. Die Matrix S ist dann gegeben als

$$S = \begin{pmatrix} \cdots & & \\ \vec{b}_1 & \vdots & \vec{b}_n \\ \cdots & & \end{pmatrix}$$

Somit ist S die Matrix mit den Spalten $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$.

Beispiel

Betrachte die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir möchten nun diese Matrix diagonalisieren. Zuerst berechnen wir die Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2$$

Somit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. In diesem Fall haben wir also zwei Eigenwerte die gleich sind. Nun bestimmen wir die Basisvektoren der Eigenräume. Dazu betrachten wir zuerst das Gleichungssystem für $\lambda_1 = 0$:

$$A\vec{v} = 0$$

⁷Es gibt Matrizen bei denen das nicht der Fall ist. Solche Matrizen nennt man *nicht diagonalisierbar*. Es gibt tatsächlich Klassifizierungen bei denen man sagen kann, ob eine Matrix diagonalisierbar ist oder nicht. Wir werden jedoch nicht weiter darauf eingehen. In diesem Themenheft beschäftigen wir uns nur mit *diagonalisierbaren* Matrizen.

Wir erhalten daraus

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für den Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ betrachten wir die Gleichung

$$(A - 2 \cdot E)\vec{v} = 0$$

Wir erhalten daraus die Basisvektoren

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt nun

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$D = \text{diag}(0, 2, 2)$$

—

7.

a) Zeige mithilfe des Entwicklungssatzes

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$$

b) Zeige mithilfe des Entwicklungssatzes und vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

8. Berechne die inverse Matrix der Matrix S aus dem obigen Beispiel und zeige, dass tatsächlich gilt:

$$A = SDS^{-1}$$

9. Diagonalisiere die folgenden Matrizen und gib die dazugehörige Transformationsmatrix S an:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -6 & -5 & 8 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}$

Eine wichtige Anwendung der Diagonalisierung findet sich in der Theorie der Differentialgleichungen, insbesondere bei Systemen von linearen Differentialgleichungen. Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung in der Ableitungen einer Funktion $y(x)$ vorkommen, wobei man die Funktion y sucht.

Beispiel

Ein Beispiel einer Differentialgleichung ist

$$y' = y$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist einfach, nämlich $y(x) = C \cdot e^x$, wobei C eine Konstante ist. └

Homogenes System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Ein homogenes $n \times n$ System von linearen Differentialgleichungen ist von der Form

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + \dots + a_{1n}(x)y_n(x) \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + \dots + a_{nn}(x)y_n(x) \end{aligned}$$

solch ein System kann man mithilfe einer Matrix betrachten. Das obere Gleichungssystem kann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

In kompakter Schreibweise haben wir also

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$$

, wobei

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} \quad \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Der Ansatz aus dem vorherigen Beispiel wird dazu verwendet um lineare Systeme von Differentialgleichungen zu lösen. Dazu werden die Koeffizienten als Matrix A (eine $n \times n$ -Matrix, falls wir ein $n \times n$ -System von Differentialgleichungen haben) aufgefasst und die Lösung beinhaltet ein Objekt von der Form e^A , ein *Matrixexponential*. Natürlich muss man dabei verstehen, was dieser Ausdruck genau bedeutet und ob dieser tatsächlich auch Sinn ergibt. Es wird dabei die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion genutzt: $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$. Wir möchten uns hier auf den Fall beschränken bei dem die Koeffizienten von A konstant sind. Somit gilt

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$$

Wenn wir die Matrix A nun diagonalisieren, erhalten wir $A = SDS^{-1}$ und somit

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(SDS^{-1})^j}{j!}$$

Nun gilt jedoch

$$(SDS^{-1})^j = \underbrace{SDS^{-1} \cdot SDS^{-1} \cdot \dots \cdot SDS^{-1} \cdot SDS^{-1}}_j = SD^n S^{-1}$$

Damit folgt

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{SD^n S^{-1}}{j!} = S \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j}{j!} \right) S^{-1} = S e^D S^{-1}$$

Nun stellt sich noch die Frage wie man e^D berechnet wenn D eine Diagonalmatrix ist, d.h. $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dazu müssen wir verstehen wie wir D^j berechnen können. Hier kommt der Vorteil einer Diagonalmatrix ins Spiel. Für Potenzen einer Diagonalmatrix gilt nämlich

$$D^j = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j) \quad \text{für } j \in \mathbb{Q}$$

Wenn wir nun auch noch die Definition der Summe und der skalaren Multiplikation bei Matrizen benutzen, erhalten wir

$$e^D = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^j = \text{diag} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^j}{j!}, \dots, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^j}{j!} \right) = \text{diag} (e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$$

Somit gilt

$$e^A = S e^D S^{-1} = S \text{diag} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^j}{j!}, \dots, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^j}{j!} \right) S^{-1} = S \text{diag} (e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) S^{-1}$$

10. Berechne e^A für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Schreibe das folgende homogene system linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten durch das Verwenden einer Matrix A in die Form $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x)$:

$$y_1'(x) = -y_1(x) + 2y_2(x)$$

$$y_2'(x) = 3y_1(x) - 2y_2(x)$$

Berechne anschliessend e^A .

8 Vermischte Aufgaben

1. Abbildungsgleichungen, Determinante

Eine Affinität bildet $O(0,0)$ auf $O'(2,-1)$ ab; $E_1(1,0)$ und $E_2(0,1)$ werden auf $E'_1(5,3)$ und $E'_2(2,4)$ abgebildet.

- Bestimme die Abbildungsgleichung.
- Zeichne das Bild des Koordinatensystems nach der Abbildung.
- Bestimme die Determinante der Abbildungsmatrix.
- Ein Dreieck hat vor der Abbildung die Fläche 5. Was ist die Fläche des Bilddreiecks.

2. Abbildungsgleichungen, Determinante

Eine Affinität bildet $A(2,2)$ auf $A'(-2,4)$, $B(1,-1)$ auf $B'(-13,6)$ und $C(-1,0)$ auf $C'(-7,3)$ ab.

- Bestimme die Abbildungsgleichung.
- Zeichne das Bild des Koordinatensystems nach der Abbildung.
- Bestimme die Determinante der Abbildungsmatrix.
- Bestimme die Fläche des Rechtecks mit den Ecken $A(1,2)$, $B(5,2)$, $C(5,5)$ und $D(1,5)$ nach der Abbildung.

3. Abbildungsgleichungen

Bestimme die Abbildungsgleichung.

- Eine Affinität bildet $A(2,2)$ auf $A'(-2,4)$, $B(1,-1)$ auf $B'(3,6)$ ab und hat $F(1,2)$ als Fixpunkt.
- Eine Affinität bildet $A(2,2)$ auf $A'(-2,4)$ ab und hat die Fixpunktgerade $2x - 3y = 6$.
- Eine Affinität bildet $A(1,0)$ auf $A'(-2,4)$, $B(2,-1)$ auf $B'(-5,7)$ ab und hat den Fixpunkt $F(0,-1)$.

4. Umkehrabbildung

Eine affine Abbildung ist durch folgende Abbildungsgleichung gegeben.

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Zeichne das Koordinatensystem nach der Abbildung.
- Bestimme die Umkehrabbildung.

5. Umkehrabbildung

Sind die folgenden Abbildungen umkehrbar?

Wenn ja, bestimme die Umkehrabbildung.

Wenn nein, kann man das auch schon aus der Abbildungsgleichung sehen?

$$\text{a) } \vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\text{b) } \vec{x}' = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Spatprodukt

Von einer Pyramide mit einem Dreieck als Grundseite sind die Eckpunkte der Grundfläche $A(2,0,0)$, $B(0,3,2)$ und $C(0,4,0)$ gegeben, sowie die Koordinaten der Spitze $S(1,t,2)$.

Wie muss $t > 0$ gewählt werden, so dass die Pyramide das Volumen 12 hat?

7. Verkettung von Abbildungen

Eine neue Abbildung entsteht durch Hintereinanderausführen der beiden folgenden Abbildungen α und β .

$$\alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

$$\beta : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

- Bestimme die Abbildung $\alpha \circ \beta$.
- Bestimme die Abbildung $\beta \circ \alpha$.
- Kommentiere, warum die Ergebnisse der beiden vorhergehenden Aufgabenteile nicht gleich sind.

8. Verkettung von Abbildungen

Eine neue Abbildung entsteht durch Hintereinanderausführen der beiden folgenden Abbildungen α und β .

$$\alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

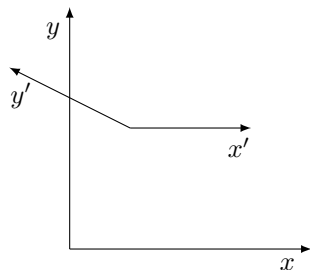
$$\beta : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Abbildung $\alpha \circ \beta$.

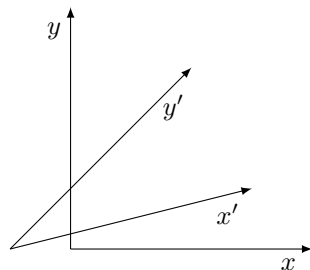
9. Determinante

Eine Abbildung ist durch die im Graphen eingezeichnete Abbildung des Koordinatensystems gegeben. Ist die Determinante der Abbildungsmatrix Null, positiv oder negativ? Begründe deine Antwort.

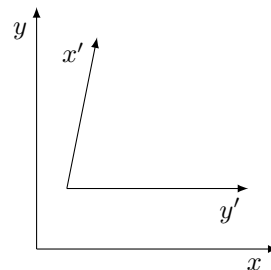
a)



b)



c)



10. Determinanten

Berechne die Determinante der folgenden Matrizen. Interpretiere den Wert der Determinante.

a) $\det \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

11. Fixpunkte und Fixpunktgeraden

Bestimme von folgenden Abbildungen alle Fixpunkte (bzw. Fixpunktgeraden)

a)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

c)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

12. Fixpunkte und Fixpunktgeraden

Für welche Werte von t und k hat die folgende Abbildung genau einen Fixpunkt, keinen Fixpunkt oder eine Fixpunktgerade?

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & t \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$$

13. Eigenwerte und Eigenräume

Bestimme für folgende Matrizen alle Eigenwerte mit den dazu gehörenden Eigenvektoren.

a)
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

A Matrizenrechnung in Octave

”GNU Octave ist eine freie Software zur numerischen Lösung mathematischer Probleme, wie zum Beispiel Matrizenrechnung, Lösen von (Differential-)Gleichungssystemen, Integration etc. Berechnungen können in Octave mit einer Skriptsprache durchgeführt werden, die weitgehend zu dem proprietären Matlab und zum ebenfalls freien FreeMat kompatibel ist.” (Wikipedia)

Das Programm Octave kann entweder online genutzt oder auch lokal installiert werden.

Beendet man eine Zeile in Octave mit einem Semikolon so wird das Ergebnis nicht angezeigt. Ohne Semikolon wird das Ergebnis angezeigt.

Beispiel

```
» A=[2,-1;2,-2]
A =
     2  -1
     3  -2
» A=[2,-1;2,-2];
»
```

Will man in Octave symbolisch rechnen (z.B. mit Unbekannten oder für exakte Werte), so kann man das `symbolic` package dazuladen (`pkg load symbolic`). Dann muss man die jeweilige Matrix aber auch symbolisch definieren (`B=sym(A)`).

A.1 Erzeugung von Matrizen

In Octave werden Matrizen in eckigen Klammern zeilenweise eingegeben, wobei die Elemente der Zeile durch ein Komma getrennt werden. Die Zeilen werden durch Semikolon getrennt.

Beispiel

```
» A=[2,-1;3,-2]
A =
     2  -1
     3  -2
»
```

Zugriff auf einzelne Matrixelemente

Beispiel

```
» a21=A(2,1)
a21 = 3
»
```

Zugriff auf eine ganze Zeile

Beispiel

```
» z1=A(1,:)
z1 =
     2  -1
»
```

Zugriff auf eine ganze Spalte

Beispiel

```
> s2=A(:,2)
s2 =
    -1
    -2
>
```

Einen Eintrag austauschen

Beispiel

```
> A(1,1)=5
A =
     5    -1
     3    -2
>
```

A.2 Berechnungen mit Matrizen

Bei den Matrizenoperationen gibt es die elementweise Operation, was durch den Punkt vor der Operation gemacht wird und die normale Operation.

Beispiel

```
> A^2
ans =
    22    -3
     9     1
> A.^2
ans =
    25     1
     9     4
>
```

Die Determinante berechnet sich mit dem Befehl `det(A)`.

Beispiel

```
> det(A)
ans = -7
>
```

Die inverse Matrix kann man entweder mit `A^(-1)` oder mit `inv(A)` berechnen.

Beispiel

```
> A^(-1)
ans =
    0.2857    -0.1429
    0.4286    -0.7143
> inv(A)
ans =
    0.2857    -0.1429
    0.4286    -0.7143
>
```

A.3 Eigenwerte und Eigenräume

Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen werden als zwei Ausgabematrizen V und D ausgegeben. Die Diagonaleinträge von D sind die Eigenwerte von A und die Spalten von V sind die entsprechenden Eigenvektoren (normiert auf die Länge 1):

Beispiel

```
> [V,D]=eig(A)
V =
    0.9090    0.1511
    0.4169    0.95885
D =
Diagonal Matrix
    4.5414    0
    0    -1.5414
>
```

Das charakteristische Polynom erhält man mit `poly(A)`.

Beispiel

```
> poly(A)
ans =
    1.000   -3.000   -7.000
>
```

Wie du siehst, gibt Octave nur die Koeffizienten vor den Potenzen von λ aus, d.h. das charakteristische Polynom wäre im obigen Beispiel: $1\lambda^2 - 3\lambda - 7$

A.4 Spezielle Matrizen

Spezielle Matrizen sind bereits in Octave implementiert. Einheitsmatrix mit `eye`

Beispiel

```
> eye(3)
ans =
Diagonal Matrix
    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
>
```

Nullmatrix mit `zeros`

Beispiel

```
> zeros(2,3)
ans =
    0    0    0
    0    0    0
>
```

Matrix mit alles 1-en mit `ones`

Beispiel

```
> ones(3,2)
```

```
ans =
```

```
 1  1
 1  1
 1  1
```

```
>
```

└

A.5 Aufgaben

1. Definieren von Matrizen

Definiere folgende Matrizen in Octave.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Eigenwerte und Eigenvektoren

- Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von B .
- Lese (nicht abtippen, sondern mit Octave-Befehlen) den ersten Eigenvektor aus der Matrix V aus (v_1). Erstelle ein Vielfaches dieses Vektors, so dass du schöne Werte erhältst (durch einen Wert in der Matrix teilen und/oder multiplizieren).

Versuche auch beim zweiten Eigenvektor (v_2) schöne Zahlen zu erhalten.

Bemerkung: Bei v_3 sieht man es nicht einfach so. Will man die Eigenwerte und Eigenvektoren in exakter Berechnung, muss man das `symbolic` package benutzen. (`> pkg load symbolic`)

3. Berechne die **Determinante** der Matrix A .

- Berechne das **Inverse** der Matrix A . Multipliziere diese Matrix mit 16 um zu sehen, dass man $\frac{1}{16}$ ausklammern kann um eine schöne Matrix mit ganzen Zahlen zu erhalten.

- Es sollte klar sein, dass man A und B nicht multiplizieren kann, weil die Dimensionen der Matrizen dies nicht erlauben.

- Probiere ($A \cdot B$) trotzdem aus und schau dir die Fehlermeldung an.
- Man kann nun bei B eine Zeile nach der ersten einfügen, so dass man eine 4x3-Matrix erhält.,d.h.

$$B_{neu} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel Code: `M = [M(1:2, :); [0,0,0,0,0]; M(3:end, :)]`, fügt in die 5x5-Matrix M eine 0-Zeile ein, d.h.

`M(1:2` bedeutet: nimm Zeile 1 bis 2 von M

`, :)` bedeutet: Spalten einfach alle

- Berechne nun das Produkt $A \cdot B_{neu}$.

- d) Füge nun auch noch eine Spalte vor der letzten ein mit allen Einträgen 0, d.h.

$$B_{nn} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

hier zum vorher gewählten Beispiel der Code, den du nun selber interpretieren können solltest:

$M = [M(:, 1:4), [0;0;0;0;0], M(:, 5)]$ oder $M = [M(:, 1:4), [0,0,0,0,0]', M(:, 5)]$

- e) Eine einzelne Zahl auswechseln ist im Gegensatz zu den beiden vorherigen Aufgaben relativ einfach, man schreibt einfach $A(\text{Zeile}, \text{Spalte}) = \text{gewünschte Zahl}$.

Wechsle auf diese Weise die 0 an der Kreuzungsstelle der 0-en mit einer 7 aus, d.h.

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- f) Wechsle nun auch hintereinander eine ganze Zeile und eine ganze Spalte durch 1-en aus d.h.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Schliesse die Syntax hierzu aus den vorherigen Beispielen.

6. Erstelle Nullmatrizen, Einheitsmatrizen und Matrizen mit lauter 1-en als Einträgen in verschiedenen Dimensionen.

7. Löse die folgende Aufgabe zur **Input-Output-Analyse** mit Octave:

Die Verflechtung der Produktion von Sektoren eines Betriebes wird durch folgende Tabelle nach dem Leontief-Modell beschrieben.

	Sektor A	Sektor B	Sektor C	Markt	Gesamtproduktion
Sektor A	1	2	6	1	10
Sektor B	3	4	3	10	20
Sektor C	4	2	9	15	30

- a) Wie viele Einheiten bleiben für den Markt, wenn die Gesamtproduktion von Sektor A 140, von Sektor B 150 und von Sektor C 250 Produktionseinheiten beträgt?
- b) Für welche Gesamtproduktion können an den Markt von Sektor A 40, von Sektor B 80 und von Sektor C 160 Produktionseinheiten abgegeben werden?

Ergebnisse

1. Kapitel

1.

a)

Typ	A	B	C	D	E
Menge Aarau	150	220	250	100	120

Total von $150 + 220 + 250 + 100 + 120 = 840$

b)

	Modell A	Modell B	Modell C	Modell D	Modell E
Bern	200	350	400	150	150
Luzern	250	300	200	150	150
Aarau	175	250	250	150	150
Zürich	300	250	350	175	200
total	750	820	1200	500	500

Am häufigsten wird Modell C ausgeliefert

c)

	Typ A	Typ B	Typ C	Typ D	Typ E
Bern	1650	2200	3300	1100	1100
Luzern	2200	2750	3850	1650	1100
Aarau	1650	2420	2750	1100	1320
Zürich	2750	1650	3300	1650	1980

d)

	Typ A	Typ B	Typ C	Typ D	Typ E
Bern	350	550	700	250	250
Luzern	450	550	550	300	250
Aarau	325	470	500	250	270
Zürich	550	400	650	325	380

$$2. \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 & 17 \\ 5 & 8 & 13 & 20 \\ 10 & 13 & 18 & 25 \\ 17 & 20 & 25 & 32 \end{pmatrix}$$

4.

$$a) A + B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b) B - A = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 5 \\ 3 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$c) \frac{5}{2}C = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 15 & 25 & 30 \end{pmatrix}$$

$$d) 3A - \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 1 \\ 7 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$5. 2A + 2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & \dots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \dots & 2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2a_{m1} & 2a_{m2} & \dots & 2a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} & \dots & 2b_{1n} \\ 2b_{21} & 2b_{22} & \dots & 2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2b_{m1} & 2b_{m2} & \dots & 2b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a_{11} + 2b_{11} & 2a_{12} + 2b_{12} & \dots & 2a_{1n} + 2b_{1n} \\ 2a_{21} + 2b_{21} & 2a_{22} + 2b_{22} & \dots & 2a_{2n} + 2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2a_{m1} + 2b_{m1} & 2a_{m2} + 2b_{m2} & \dots & 2a_{mn} + 2b_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(a_{11} + b_{11}) & 2(a_{12} + b_{12}) & \dots & 2(a_{1n} + b_{1n}) \\ 2(a_{21} + b_{21}) & 2(a_{22} + b_{22}) & \dots & 2(a_{2n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2(a_{m1} + b_{m1}) & 2(a_{m2} + b_{m2}) & \dots & 2(a_{mn} + b_{mn}) \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = 2 \cdot (A + B) \\
&2 \cdot \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \dots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \dots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \dots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix} = 2 \cdot (B + A)
\end{aligned}$$

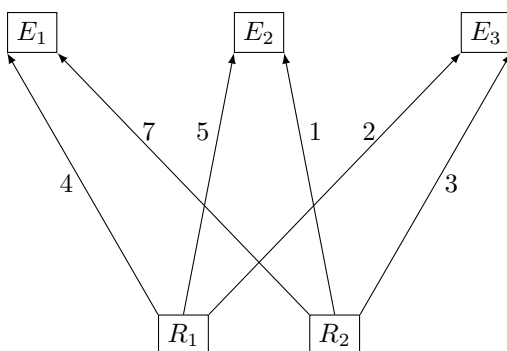
6. Die Rechengesetze (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz) gelten für die Elemente der Matrix.

7.

a)
$$\begin{matrix} & Z_1 & Z_2 \\ R_1 & \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \\ R_2 & \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \\ R_3 & \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

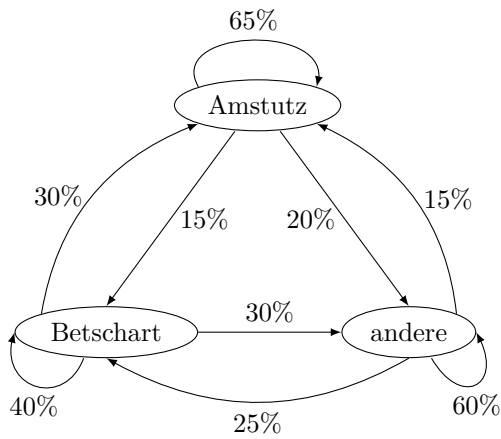
b)
$$\begin{matrix} & E_1 & E_2 & E_3 \\ Z_1 & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \\ Z_2 & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

8.



9.

a)



b)

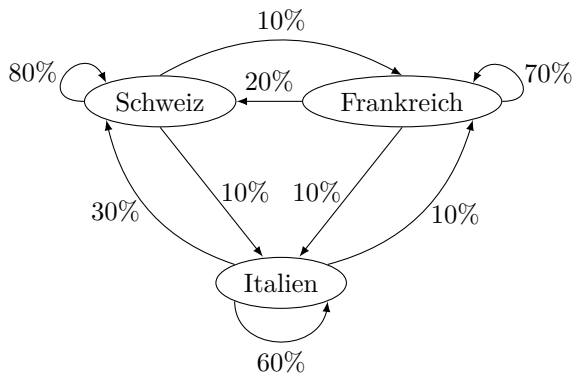
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>X</i>
<i>A</i>	(0.65	0.30	0.15)
<i>B</i>	(0.15	0.40	0.25)
<i>X</i>	(0.20	0.30	0.60)

c) Welcher Anteil von j zu i wechselt.

d) Die Spaltensummen müssen 100%=1 sein.

10.

a)



b)

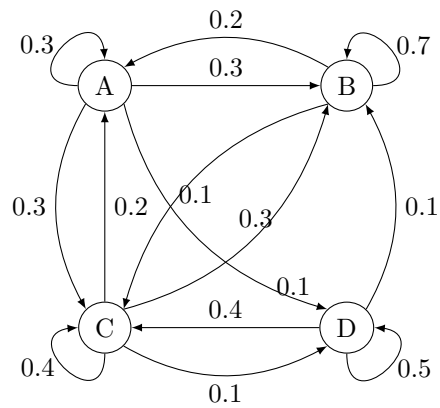
	<i>CH</i>	<i>F</i>	<i>I</i>
<i>CH</i>	(0.8	0.2	0.3)
<i>F</i>	(0.1	0.7	0.1)
<i>I</i>	(0.1	0.1	0.6)

11.

a)

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	(0.3	0.2	0.2	0)
<i>B</i>	(0.3	0.7	0.3	0.1)
<i>C</i>	(0.3	0.1	0.4	0.4)
<i>D</i>	(0.1	0	0.1	0.5)

b)



12. Ergebnisvektor: $A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1334 \\ 8 \\ 994 \\ 466 \end{pmatrix}$

13.

a) $\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

14.

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.5 \\ 9 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

$$15. A \cdot B = \begin{pmatrix} 1334 & 303 & 917 \\ 8 & 2 & 7 \\ 994 & 224 & 705 \\ 466 & 102 & 358 \end{pmatrix}$$

16.

a) $\begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -24 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -15 & 20 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 22 & 34 & -36 & -19 \\ -6 & 7 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

e) (161)

f) $\begin{pmatrix} 36 & -60 & 84 \\ -33 & 55 & -77 \\ 30 & -50 & 70 \end{pmatrix}$

17.

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 740 \\ 75 \\ 110 \\ 205 \\ 155 \\ 50 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 20 & 0 \\ 12 & 30 & 35 \\ 0 & 10 & 20 \\ 3 & 12 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 & 288 & 380 \\ 37 & 50 & 35 \\ 3 & 22 & 60 \\ 18 & 64 & 135 \\ 15 & 52 & 95 \\ 3 & 12 & 40 \end{pmatrix}$$

18.

$$\text{a) } \begin{array}{c} \text{Grund} \quad \text{Erw} \\ A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ B \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \\ 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \\ 12 & 12 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{array}{c} G \quad E \\ Se \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \\ 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ R \\ Schr \\ D \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \\ 12 & 12 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 280 \\ 240 \\ 192 \end{pmatrix}$$

19.

a) Die Spaltensummen müssen 1=100% ergeben

$$\begin{array}{c} A \quad S \quad M \\ A \begin{pmatrix} 0.65 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.15 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \\ S \\ M \end{array}$$

$$\text{b) in drei Jahren } A^3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.515625 & 0.496 & 0.47275 \\ 0.248 & 0.256 & 0.248 \\ 0.236375 & 0.248 & 0.27925 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.01163 \\ 2.504 \\ 2.48438 \end{pmatrix}$$

$$20. A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Nein, das Kommutativgesetz gilt nicht im Allgemeinen, da man hier ein Gegenbeispiel hat.

21.

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 10 \\ 50 & 0 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 8 & 15 & 17 \\ 7 & 15 & 13 \\ 9 & 15 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 10 \\ 50 & 0 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 1610 & 390 \\ 1390 & 360 \\ 1830 & 420 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 40 & 10 \\ 50 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 410 & 90 \\ 190 & 60 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 1610 & 390 \\ 1390 & 360 \\ 1830 & 420 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

22.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 12 & 0 & 14 \\ 20 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -75 \\ 46 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23.

- a) $\mathbb{L} = \{(2, 4)\}$
 b) $\mathbb{L} = \{(3, 1)\}$
 c) $\mathbb{L} = \{(1, 0, -2)\}$
 d) $\mathbb{L} = \{(-1, 3, -2)\}$

24. Gesucht ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ so, dass $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4120 \\ 5880 \end{pmatrix}$

Man würde jetzt gerne durch die Matrix teilen, aber das gibt es nicht. Anstatt zu teilen kann man auch mit dem Inversen multiplizieren. $5x = 10$, man teilt normalerweise hier durch 5.

Man kann aber auch mit $\frac{1}{5}$ multiplizieren.

$$\frac{1}{5} \cdot 5x = \frac{1}{5} \cdot 10$$

$$1x = 2$$

$$x = 2$$

Wir machen nun das gleiche bei der Matrix. Dazu berechnen wir erst mit dem Taschenrechner das Inverse der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.6 & -0.4 \\ -0.6 & 1.4 \end{pmatrix}$$

multipliziert man nun die ganze Gleichung von links mit dem Inversen, löst man somit die Gleichung, denn

$$\begin{pmatrix} 1.6 & -0.4 \\ -0.6 & 1.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & -0.4 \\ -0.6 & 1.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4120 \\ 5880 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4240 \\ 5760 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4240 \\ 5760 \end{pmatrix}$$

25.

a) $\mathbb{L} = \{(1, -2, 3)\}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Mit dem Taschenrechner kann man nun die inverse Matrix berechnen und so die Lösung bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{12} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

durch einige Umformungen erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

und kann somit die Lösungsmenge ablesen: $\mathbb{L} = \{(1, -2, 3)\}$

26.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 33 & -2 & -7 \\ -14 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} & 0 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

27.

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ also } w = 0, x = 1, y = -1, z = -2$$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ also } v = \frac{3}{2}, w = -\frac{1}{2}, x = \frac{5}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{7}{2}$$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

28.

a) $x = 20, y = 30$

$$M = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \\ B & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix} \\ C & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c) $M \cdot \begin{pmatrix} 3500 \\ 11'200 \\ 5300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5'160 \\ 10'190 \\ 4'650 \end{pmatrix}$

b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1.57 & -0.10 & -0.77 \\ -0.37 & 1.3 & -0.03 \\ -0.2 & -0.2 & 1.8 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3500 \\ 11'200 \\ 5300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 13'100 \\ 6'600 \end{pmatrix}$$

d) $M^{12} = \begin{pmatrix} 0.35064 & 0.34847 & 0.35233 \\ 0.44941 & 0.45158 & 0.44747 \\ 0.19995 & 0.19995 & 0.20020 \end{pmatrix}$

29. $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 20 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -24 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -20 & 8 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Ja, allgemein gilt $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$

2. Kapitel

$$1. A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{17} & \frac{3}{11} \\ \frac{5}{9} & \frac{2}{17} & \frac{3}{11} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{17} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{17} & \frac{3}{11} \\ \frac{5}{9} & \frac{2}{17} & \frac{3}{11} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{17} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1 + 3 + 4 \\ 5 + 2 + 3 + 7 \\ 2 + 4 + 3 + 2 \end{pmatrix}$$

2. Gesamtproduktion bekannt, Marktproduktion gefragt: $\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}$
 Marktnachfrage bekannt, Gesamtproduktion gefragt: $\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}$

3.

$$a) \vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} \qquad b) \vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 & -0.3 \\ -0.4 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 700 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 260 \\ 140 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} \approx \begin{pmatrix} 1.74 & 0.99 & 1.45 \\ 0.81 & 1.63 & 1.51 \\ 0.23 & 0.47 & 1.86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 86 \\ 79 \\ 102 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 376 \\ 353 \\ 247 \end{pmatrix}$$

4.

$$a) A = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad b) (E - A) \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 60 \end{pmatrix}$$

140 ME der Produktion von L und 60 ME der Produktion von I.

$$c) (E - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 216 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{17}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 216 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 156 \end{pmatrix}$$

Es müssen 360 ME von L und 156 ME von I produziert werden.

5.

$$a) A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0.25 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \qquad b) 60 \text{ ME von P1, 9.5 ME von P2, 12 ME von P3}$$

$$c) (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & 4 & 1 \\ \frac{5}{8} & 1 & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

Es müssen 790 ME von P1, 980 ME von P2, 445 ME von P3 produziert werden.

d) Der interne Produktverbrauch ist sehr hoch, so dass nur ein kleiner Teil der Produktion für die Erfüllung der Endnachfrage zur Verfügung steht (bei b)) bzw. ein Vielfaches des Endverbrauchs produziert werden muss (bei c)).

6.

$$a) \vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}_a = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.1 \\ -0.4 & -0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 5 \\ 290 \end{pmatrix}$$

$$b) \vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x}_b = \begin{pmatrix} 35 \\ -5 \\ 360 \end{pmatrix}, \text{ somit ist es nicht möglich, da der Landwirtschaftssektor gar nicht genug produziert}$$

(-5) um nur schon die interne Nachfrage zu decken.

$$c) \vec{x}_c = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}_c = \begin{pmatrix} 1.375 & 0.225 & 0.425 \\ 0.625 & 1.375 & 0.375 \\ 0.875 & 0.325 & 1.725 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 555 \\ 725 \\ 1135 \end{pmatrix}$$

3. Kapitel

1.

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right)}_{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

2.

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \neq$$

3.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Tipp: erst Zeilen geschickt umordnen, dann ist man schon fast fertig.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \\ -6 & 8 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{195} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 31 & 4 \\ -11 & 32 & 23 \\ 40 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ also } x = 1, y = 2, z = 3$$

5.

$$6\Omega \cdot I_{6\Omega} + 1\Omega \cdot I_{1\Omega} = 1V \quad (\text{Schleife links})$$

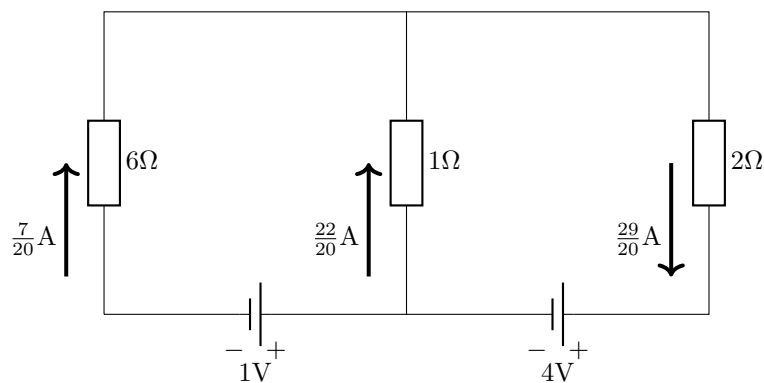
$$-1\Omega \cdot I_{1\Omega} - 2\Omega \cdot I_{2\Omega} = 4V \quad (\text{Schleife rechts})$$

$$I_{6\Omega} - I_{1\Omega} + I_{2\Omega} = 0 \quad (\text{Knoten Mitte oben})$$

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & -12 \\ -1 & -7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -22 \\ -29 \end{pmatrix}$$

$$\text{d.h. } I_{6\Omega} = \frac{7}{20}, I_{1\Omega} = -\frac{22}{20} = -\frac{11}{10}, I_{2\Omega} = -\frac{29}{20}$$

Für die effektiven Stromrichtungen ergibt sich also folgender Graph:



$$6. D = K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$A = \begin{matrix} & M_1 & M_2 & M_3 \\ W & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0.05 & 0.1 & 0.1 \\ 0.15 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \\ D \\ H \\ R \\ L \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & L_1 & L_2 \\ M_1 & \begin{pmatrix} 25 & 17 \\ 30 & 20 \\ 15 & 18 \end{pmatrix} \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 29 & 19.6 \\ 16.5 & 15 \\ 13.5 & 11.4 \\ 5.75 & 4.65 \\ 5.25 & 4.35 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l|l|l} & \text{Laden 1} & \text{Laden 2} \\ \hline \text{Weizenflocken} & 29 \text{ kg} & 19.6 \text{ kg} \\ \text{Dinkelflocken} & 16.5 \text{ kg} & 15 \text{ kg} \\ \text{Haferflocken} & 13.5 \text{ kg} & 11.4 \text{ kg} \\ \text{Rosinen} & 5.75 \text{ kg} & 4.65 \text{ kg} \\ \text{Leinsamen} & 5.25 \text{ kg} & 4.35 \text{ kg} \end{array}$$

8.

$$a) A \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 \\ 90 \\ 330 \\ 120 \end{pmatrix}$$

d.h. man muss 135 Korpuse, 90 Türen, 330 Tablare und 120 Schubladenelemente herstellen.

$$b) A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 109 \\ 59 \\ 297 \\ 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ -2 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 109 \\ 59 \\ 297 \\ 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 25 \\ 34 \end{pmatrix}$$

d.h. es wurden 40 Stück von Typ 1, 10 Stück von Typ 2, 25 Stück von Typ 3 und 34 Stück von Typ 4 bestellt.

9.

$$\begin{pmatrix} 250 & 125 & 250 & 125 \\ 250 & 125 & 200 & 175 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 200 & 250 & 300 & 250 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2750 \\ 2800 \\ 57 \\ 3400 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 & 125 & 250 & 125 \\ 250 & 125 & 200 & 175 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 200 & 250 & 300 & 250 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2750 \\ 2800 \\ 57 \\ 3400 \end{pmatrix} = \frac{1}{1000} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 10 & -500 & 0 \\ 3 & 5 & -1250 & 15 \\ 7 & -15 & 750 & -5 \\ -13 & 5 & 750 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2750 \\ 2800 \\ 57 \\ 3400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Er hat also 5 Zitronencakes, 2 Hauscakes, 3 Marmorkuchen und 4 Kokuscakes gebacken.

10.

$$A = \begin{matrix} & Z_1 & Z_2 \\ G_1 & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ G_2 & \\ G_3 & \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & S_1 & S_2 \\ Z_1 & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ Z_2 & \end{matrix}$$

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 19 & 18 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = C \qquad \text{b) } C \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 4600 \\ 2400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix}$$

11.

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } M \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.36 \\ 0.18 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } M^2 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.35 \\ 0.21 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } M^3 = \begin{pmatrix} 0.584 & 0.258 & 0.336 \\ 0.238 & 0.486 & 0.394 \\ 0.178 & 0.256 & 0.27 \end{pmatrix}$$

12.

	P	Q	R	Markt	Produktion
P	a_{11}	10	40	50	100
Q	0	40	a_{23}	100	160
R	30	20	20	y_3	200

a) Verflechtungstabelle:

Daraus kann man $a_{11} = 0$, $a_{23} = 20$ und $y_3 = 130$ ablesen.

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0.0625 & 0.2 \\ 0 & 0.25 & 0.1 \\ 0.3 & 0.125 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & -0.06025 & -0.2 \\ 0 & 0.75 & -0.1 \\ -0.3 & -0.125 & 0.9 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 57 \\ 26 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 48 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} = (E - A) \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 1200 \\ 720 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 381 \\ 828 \\ 318 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1t^2 & 0.2 \\ 0 & 0.1t^2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 40t \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t^3 + 140 \\ -4t^3 + 40t - 10 \\ -16t + 90 \end{pmatrix}$$

Um die Summe der Marktangaben der drei Zweigwerke zusammen zu berechnen, muss man nun also die drei Zeilen addieren und man erhält:

$$S(t) = -8t^3 + 24t + 220$$

Zur Bestimmung des Maximums muss man $S'(t) = 0$ berechnen:

$$S'(t) = -24t^2 + 24 = 0 \text{ dies gilt f\u00fcr } t = 1 \text{ (und } t = -1, \text{ was uninteressant ist).}$$

d.h. man hat ein Maximum an Marktangaben f\u00fcr $t = 1$.

4. Kapitel

4. Basis: $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, wobei

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit der 1 an der i -ten Stelle. Die Dimension von \mathbb{R}^n ist somit n .

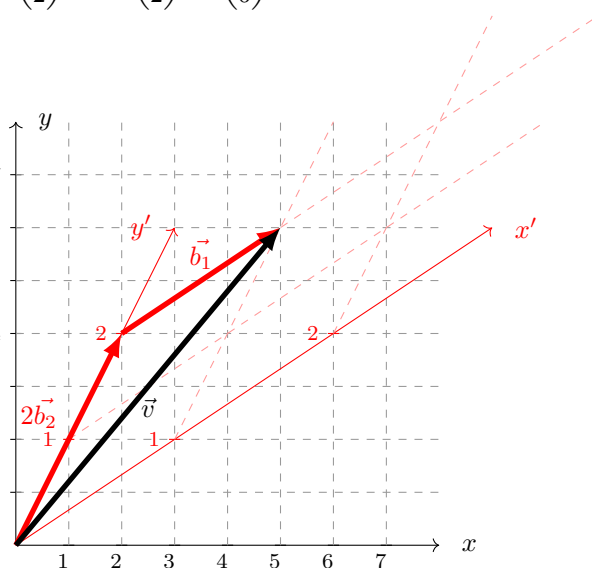
5. Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis der 2×2 Matrizen. Dasselbe gilt für $n \times n$. Dort bilden die Matrizen

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis, wobei alle Einträge Null sind ausser der ij -te Eintrag, welcher 1 ist. Damit ist die Dimension der $n \times n$ Matrizen gleich n^2 .

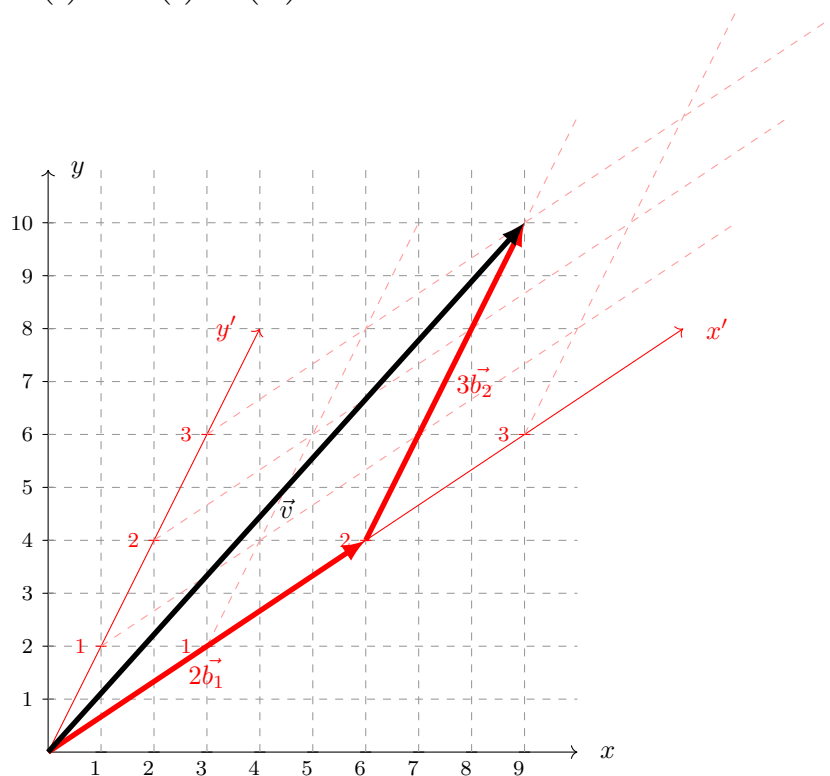
7.

a) $1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, also $1 \cdot \vec{b}_1 + 2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}$



b) $\vec{v}_{\text{neue Basis}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$c) 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$



8.

- a) $2 \cdot \vec{v}_1 - 3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_2$
 b) Zwei der drei Vektoren sind also linear unabhängig. Die Dimension des Unterraums ist also 2.
 c) Es sind alle Vektoren, die als Linearkombination von \vec{v}_1 und \vec{v}_3 geschrieben werden können.

$$9. \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also liegt } \vec{u} \text{ in der Linearen Hülle von } \vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_2.$$

10.

$$a) -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ d.h. die Vektoren sind linear abhängig.}$$

b) Dimension 2

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

auf Zeilenstufenform:

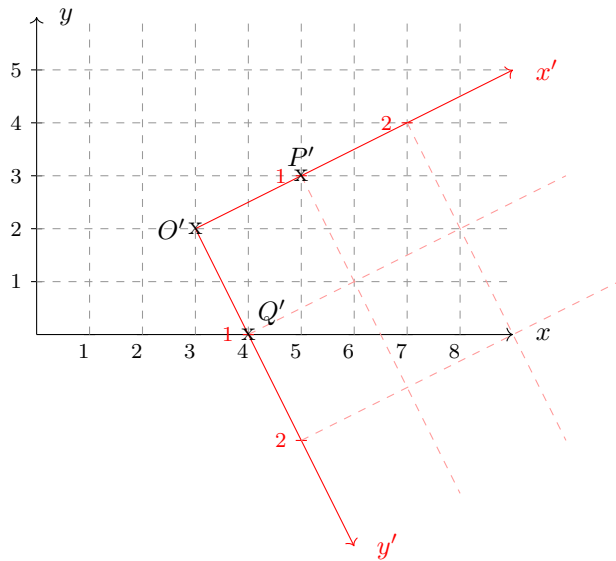
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nur zwei Zeilen sind ungleich einer Nullzeile, also ist der Rang der Matrix 2, also die Dimension der linearen Hülle auch 2. Dies ist also eine andere Möglichkeit, die Dimension der linearen Hülle zu bestimmen.

5. Kapitel

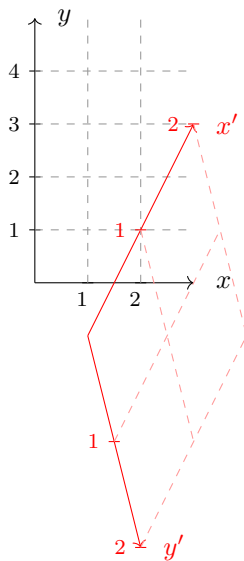
$$1. T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

T besteht aus den beiden neuen Einheitsvektoren (Basis des neuen Raumes), \vec{b} ist die Verschiebung des Ursprungs.

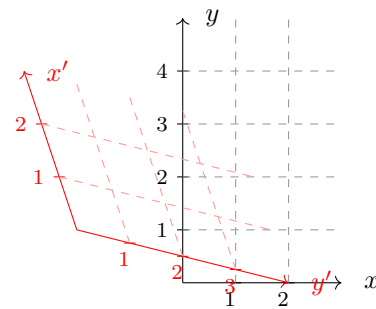


2.

$$a) \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

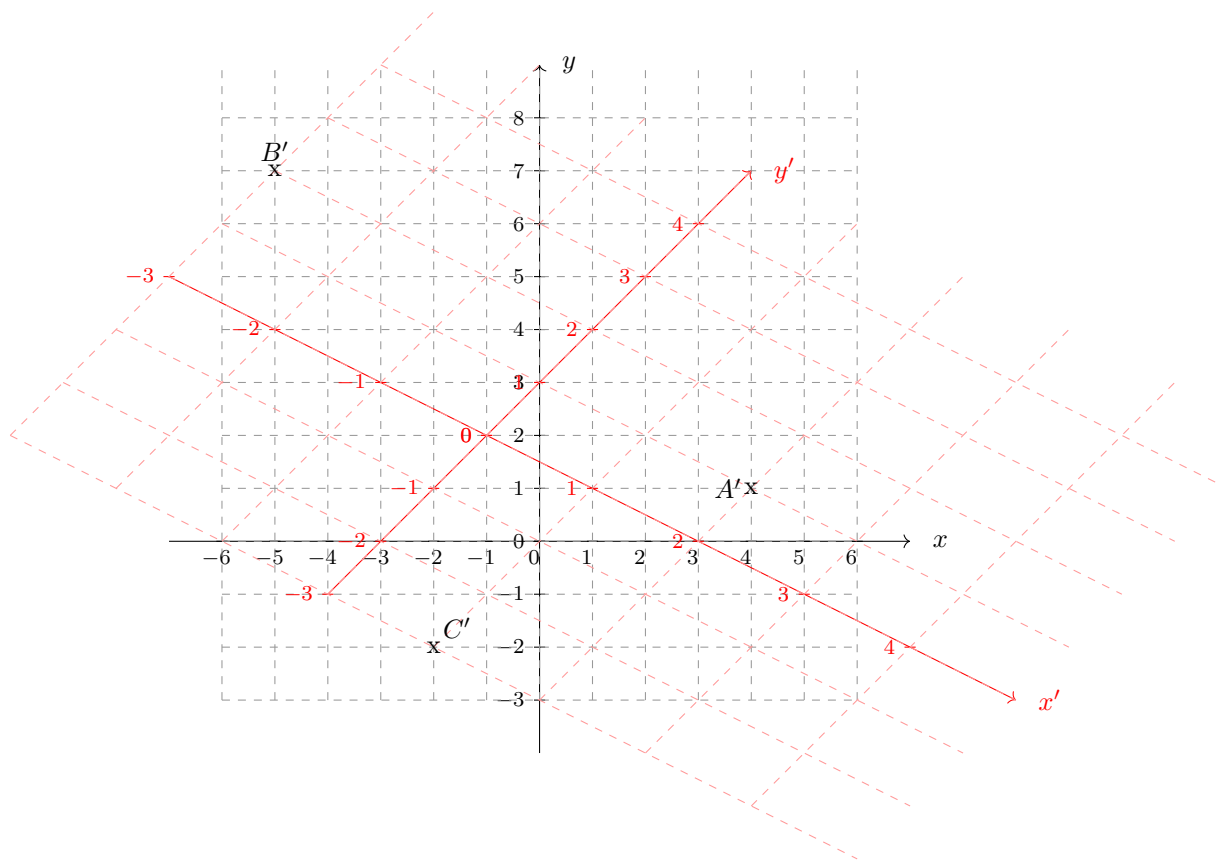


$$b) \vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



3.

a)

b) $A'(4, 1)$, $B'(-5, 7)$, $C'(-2, -2)$

c)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man setzt A in die Abbildungsgleichung für \vec{x} ein, und rechnet \vec{x}' aus. \Rightarrow ja, es sind die gleichen Werte

4.

a)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

c)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

g)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

f)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.

a)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 0.5 & -0.75 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

6.

$$\text{a) } \alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \alpha^{-1}: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) $E^{-1} = E$, und $\vec{x}' = A^{-1} \cdot \vec{x} - A^{-1} \cdot \vec{b}$, somit ist

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7.

$$\text{a) } \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{-1}: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) Wenn man einen Punkt P an einem Punkt Z spiegelt, wird der abgebildete Punkt P' durch eine erneute Punktspiegelung am selben Spiegelpunkt Z wieder auf sich selber abgebildet, d.h. auf P .

8.

a) Man bildet durch eine Konstruktion drei Punkte ab:

z.B. $A(0, 0) \mapsto A'(0, 0)$, $B(3, 4) \mapsto B'(3, 4)$ und $C(7, 1) \mapsto C'(-1, 7)$.

daraus berechnet man die Abbildungsgleichung:

$$\vec{x}' = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

siehe FoTaBe S. 112, $\tan(\varphi) = \frac{1}{2}$

$$\text{b) } \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{625} \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = E$$

c) Spiegelt man einen Punkt P an einer Geraden, so wird er auf P' abgebildet. Spiegelt man nun P' wieder an der selben Geraden, so erhält man wieder P . Durch 2-maliges Spiegeln an der selben Geraden, sind also alle Punkte wieder am Ursprungspunkt, d.h. es passiert gar nichts, was gleich der Abbildung mit der Einheitsmatrix ist.

9.

a) $A'(6, 9, 9)$, $B'(15, 14, 14)$ und $C'(10, 11, 18)$

$$\text{b) } \alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \alpha^{-1}: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix}$$

d) man erhält wieder die Originalpunkte $A(1, 2, -3)$, $B(10, 7, 2)$ und $C(5, 4, 6)$.

10.

a) $P'(2, -3, 2)$

b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Abbildung und die Umkehrabbildung haben die gleiche Abbildungsgleichung. Dies sollte auch klar sein, denn, wenn man zweimal hintereinander am gleichen Punkt spiegelt, dann wird jeder Punkt wieder auf den Originalpunkt abgebildet.

c) Man erhält wieder $P(1, 1, 1)$.

11.

a) $P'(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$

b) $\alpha^{-1}: \vec{x}' = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

c) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Man erhält wieder $P(1, 1, 1)$.

12.

a) $P(3, 2)$ geht durch Spiegeln (α) in $P'(-3, 2)$ über. Nach der Verschiebung erhält man $P''(-5, 2)$.

b) $P(3, 2)$ geht durch Verschieben (α) in $P'(1, 2)$ über. Nach der Spiegelung erhält man $P''(-1, 2)$.

c) $\alpha \circ \beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

$\beta \circ \alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

d) $\beta \circ \alpha: \vec{x}' = B \cdot (A \cdot \vec{x} + \vec{a}) + \vec{b} = B \cdot A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{a} + \vec{b}$

$\alpha \circ \beta: \vec{x}' = A \cdot (B \cdot \vec{x} + \vec{b}) + \vec{a} = A \cdot B \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{b} + \vec{a}$

da im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$ sind die beiden im Allgemeinen nicht gleich, d.h. die Verkettung nicht kommutativ, auch wenn die Abbildungen linear wären, d.h. $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$.

13.

a) $\alpha \circ \beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\beta \circ \alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\alpha \circ \beta: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\beta \circ \alpha: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Es ist $\alpha^{-1} = \beta$, also ist $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ die identische Abbildung, d.h. $\vec{x}' = \vec{x}$

14.

a) $F(-8, 10)$

d) $F(\frac{2}{3}, 0)$

g) kein Fixpunkt

b) keine Fixpunkte

e) $F(4, -4)$

h) $F(\frac{1}{3}, -1, -\frac{4}{3})$

c) $F(17, 4)$

f) Fixpunktgerade $2x + 5y = -7$

15.

$$\text{a) } \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \text{b) } \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c) } \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

16.

$$\text{a) } F\left(1 + \frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right), \text{ falls } t \neq 0, \qquad \text{b) } F\left(\frac{2}{3t-2}, \frac{t-2}{6t-4}\right), \text{ falls } t \neq \frac{2}{3}$$

Fixpunktgerade $y = x$ falls $t = 0$

c) Fixpunktgerade $3 = tx - ty$, falls $t \neq 0$
für $t = 0$ kein Fixpunkt

17.

a) Dreht man um zwei Winkel hintereinander, so kann man auch grad um die Summe der beiden Winkel drehen.

$$\text{b) } D_\alpha \cdot D_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

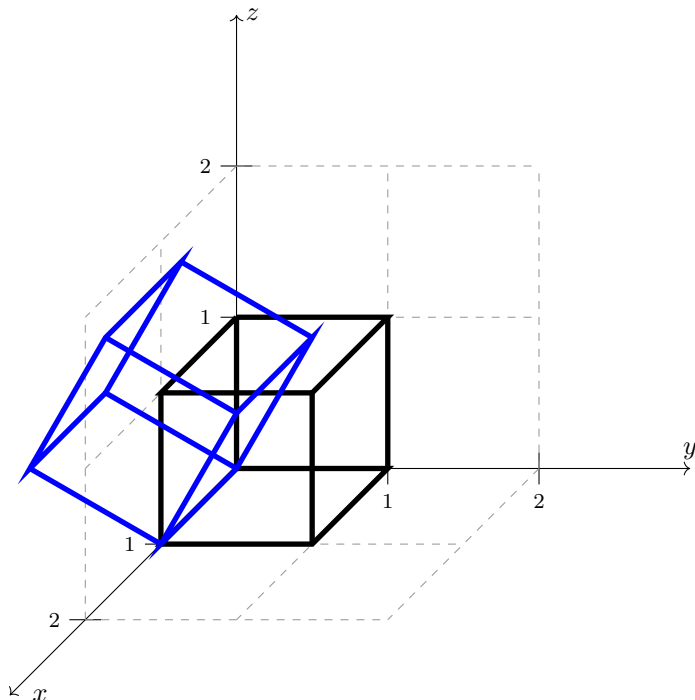
c) $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$, also

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

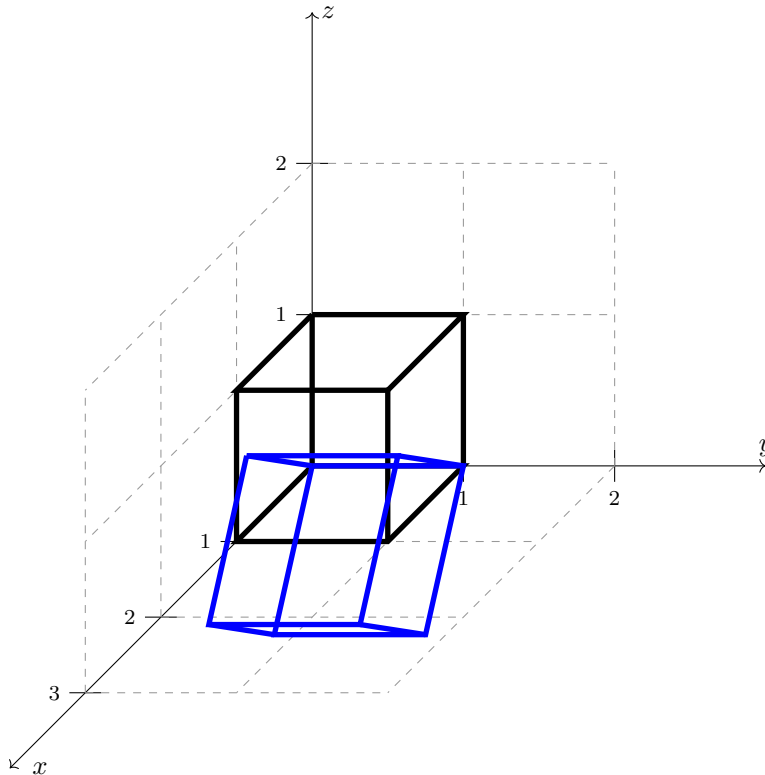
Vergleicht man die Einträge der ersten Spalte der Matrizen, so erhält man die Additionstheoreme

18.

$$\begin{aligned} \text{a) } (0, 0, 0) &\longrightarrow (0, 0, 0) \\ (1, 0, 0) &\longrightarrow (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) &\longrightarrow \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (0, 0.5, 0.866) \\ (1, 1, 0) &\longrightarrow \left(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (1, 0.5, 0.866) \\ (0, 0, 1) &\longrightarrow \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \approx (0, -0.866, 0.5) \\ (1, 0, 1) &\longrightarrow \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \approx (1, -0.866, 0.5) \\ (0, 1, 1) &\longrightarrow \left(0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \approx (0, -0.366, 1.366) \\ (1, 1, 1) &\longrightarrow \left(1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \approx (1, -0.366, 1.366) \end{aligned}$$



- b) $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$
 $(1, 0, 0) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \approx (0.5, 0, -0.866)$
 $(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$
 $(1, 1, 0) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \approx (0.5, 1, -0.866)$
 $(0, 0, 1) \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}) \approx (0.866, 0, 0.5)$
 $(1, 0, 1) \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \approx (1.366, 0, -0.366)$
 $(0, 1, 1) \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1}{2}) \approx (0.866, 1, 0.5)$
 $(1, 1, 1) \rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) \approx (1.366, 1, -0.366)$

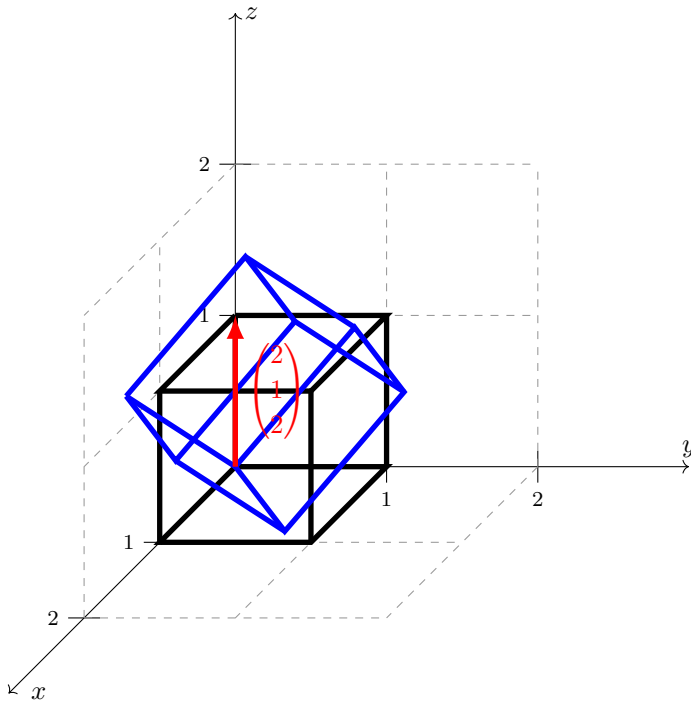


19. Normierung des Vektors $\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Rotationsmatrix ist also:

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{18} & \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}$$

- $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$
 $(1, 0, 0) \rightarrow (\frac{13}{18}, \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6}) \approx (0.722, 0.688, -0.066)$
 $(0, 1, 0) \rightarrow (\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3}) \approx (-0.466, 0.556, 0.688)$
 $(1, 1, 0) \rightarrow (\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}) \approx (0.256, 1.244, 0.622)$
 $(0, 0, 1) \rightarrow (\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{13}{18}) \approx (0.511, -0.466, 0.722)$
 $(1, 0, 1) \rightarrow (\frac{17}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{2}{9}, \frac{17}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}) \approx (1.233, 0.222, 0.656)$
 $(0, 1, 1) \rightarrow (\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}) \approx (0.045, 0.089, 1.411)$
 $(1, 1, 1) \rightarrow (\frac{19}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{7}{9}, \frac{19}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}) \approx (0.767, 0.778, 1.344)$



21. 1. Drehung: $R = \begin{pmatrix} \frac{13}{18} & \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}$

2. Orthogonalspiegelung: $S_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Rückdrehung: $R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{18} & \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{4}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{4}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}$

$$M = R^{-1} \cdot S_{xy} \cdot R \approx \begin{pmatrix} 0.991 & 0.092 & 0.096 \\ 0.092 & 0.052 & -0.994 \\ 0.096 & -0.994 & -0.043 \end{pmatrix}$$

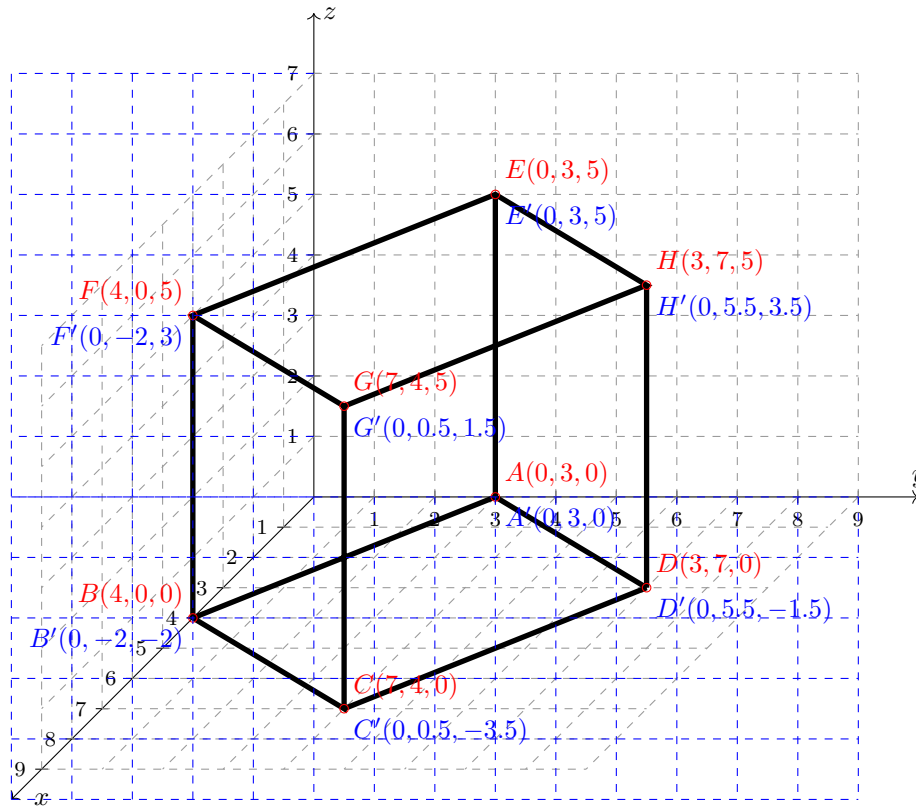
$$M \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5.893 \\ -4.255 \\ -4.708 \end{pmatrix}$$

also $P'(5.893, -4.255, -4.708)$

22. Die Abbildungsgleichung lautet

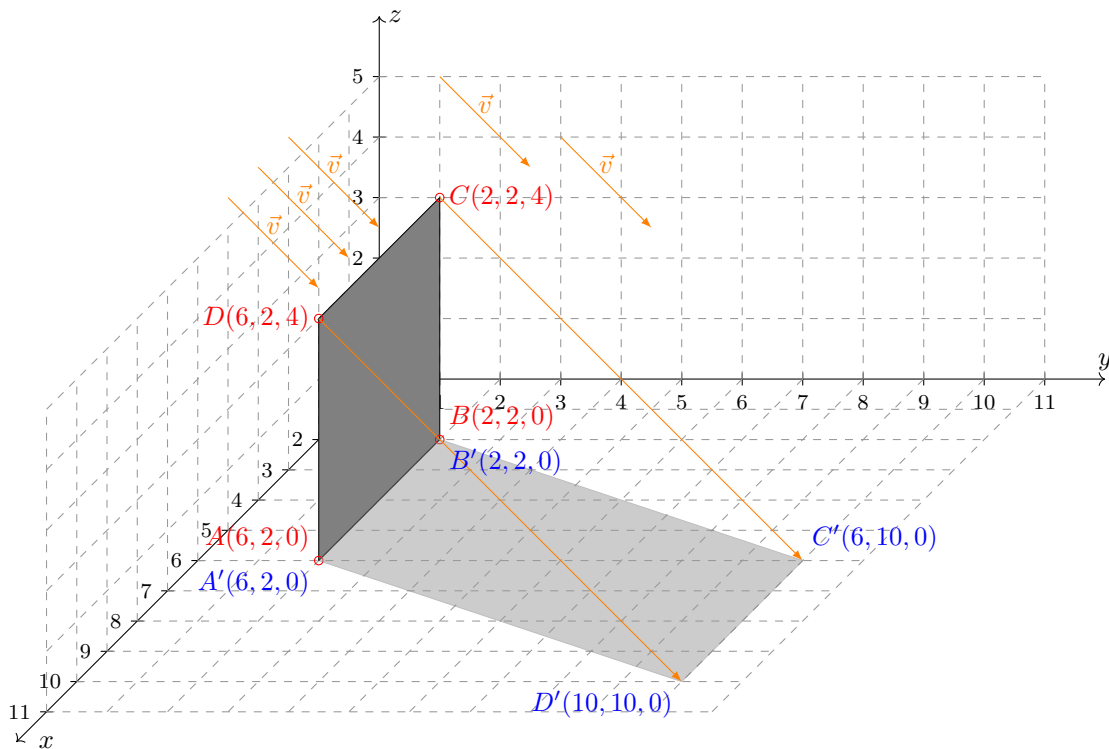
$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

Für die Eckpunkte erhält man $A'(0, 3, 0)$, $B'(0, -2, -2)$, $C'(0, 0.5, -3.5)$, $E'(0, 3, 5)$, $F'(0, -2, 3)$, $G'(0, 0.5, 1.5)$ und $H'(0, 5.5, 3.5)$.



23. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

also $C'(6, 10, 0)$ und $D'(10, 10, 0)$



24.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{b) nicht linear}$$

$$\text{also linear mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) nicht linear (ist aber eine Affinität), da d) nicht linear

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{f) nicht linear}$$

$$\text{also linear mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

25.

$$\text{a) } g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ also sind } g \text{ und } h \text{ echt parallel}$$

$$\text{c) } g': \vec{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -17 \end{pmatrix}$$

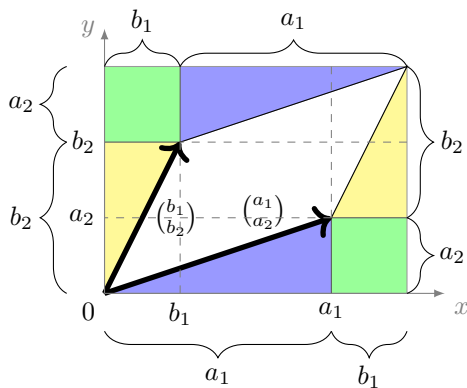
$$\text{d) } h': \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s' \cdot \begin{pmatrix} -24 \\ 4 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } -2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 4 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$26. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 28 \\ 21 \end{pmatrix}$$

6. Kapitel

1. Folgende geometrische Überlegungen führen bei allen drei Teilaufgaben zur Lösung.



Flächeninhalt äusseres Rechteck: $A_{\text{aussen}} = (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2)$

Flächeninhalt der 2 gelben Flächen: $A_{\text{gelb}} = b_1 \cdot b_2$

Flächeninhalt der 2 blauen Flächen: $A_{\text{blau}} = a_1 \cdot a_2$

Flächeninhalt der 2 grünen Flächen: $A_{\text{grün}} = 2(a_2 \cdot b_1)$

gesuchter Flächeninhalt des Parallelogramms:

$$A_{\text{aussen}} - A_{\text{gelb}} - A_{\text{blau}} - A_{\text{grün}}$$

- a) $\det(A) = 5$
 b) $\det(A) = 10$
 c) $A_{\text{aussen}} - A_{\text{gelb}} - A_{\text{blau}} - A_{\text{grün}}$
 $= (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) - b_1 \cdot b_2 - a_1 \cdot a_2 - 2a_2 \cdot b_1$
 $= a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2 - b_1 b_2 - a_1 a_2 - 2a_2 b_1$
 $= a_1 b_2 - a_2 b_1$
 also
 $\det(A) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

2.

- a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$
 $\det(A \cdot B) = 15 = 3 \cdot 5 = \det(A) \cdot \det(B)$
 b) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
 Dann ist $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$
 $\det(A \cdot B) = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12})(b_{11} \cdot b_{22} - b_{21} \cdot b_{12}) = \det(A) \cdot \det(B)$.
 c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{5} = \frac{1}{\det(A)}$
 d) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dann ist $A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
 $\det(A^{-1}) = \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{1}{\det A}$

3.

- a) $\mathbb{L} = \{(\frac{1}{2}, 4)\}$, $\det(A) = -18$ b) $\mathbb{L} = \{\}$, $\det(A) = 0$ c) $\mathbb{L} = \{(x|y) | 2x - y = 1\}$, $\det(A) = 0$

4.

a) $\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$

nicht genau eine Lösung, Sonderfall

(hier keine, d.h. die Geraden sind parallel, das kann man aber über die Determinante nicht feststellen)

b) $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -9 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} = 0$

nicht genau eine Lösung, Sonderfall

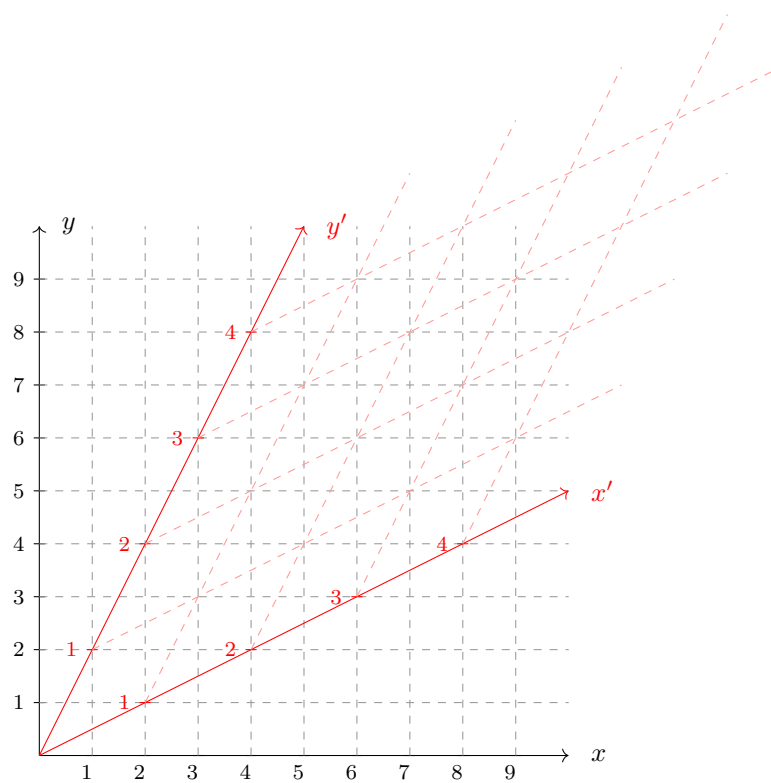
(hier unendlich viele, d.h. die Geraden sind identisch, das kann man aber über die Determinante nicht feststellen)

c) $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = 15$

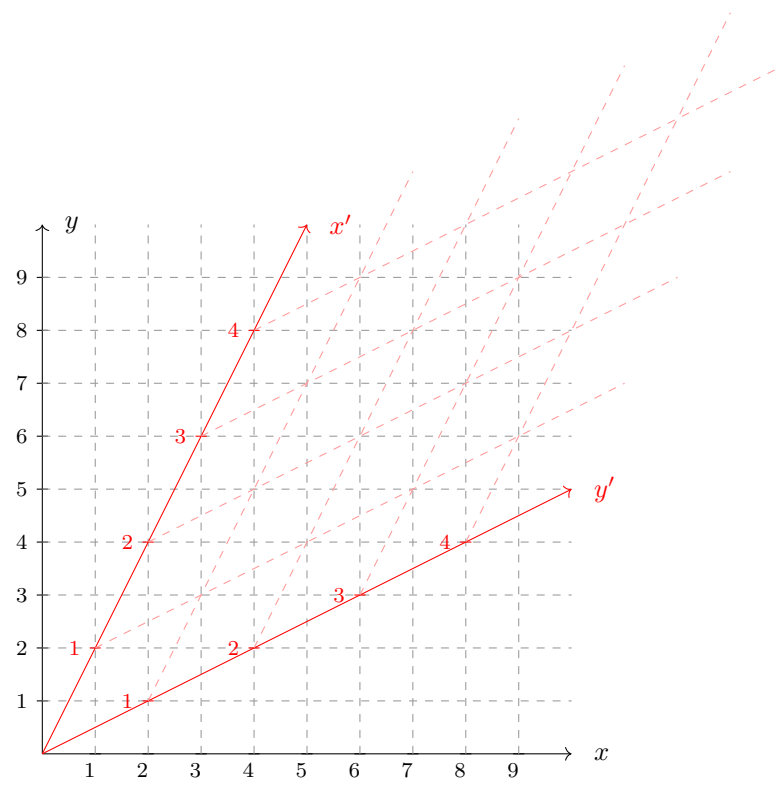
genau eine Lösung

5.

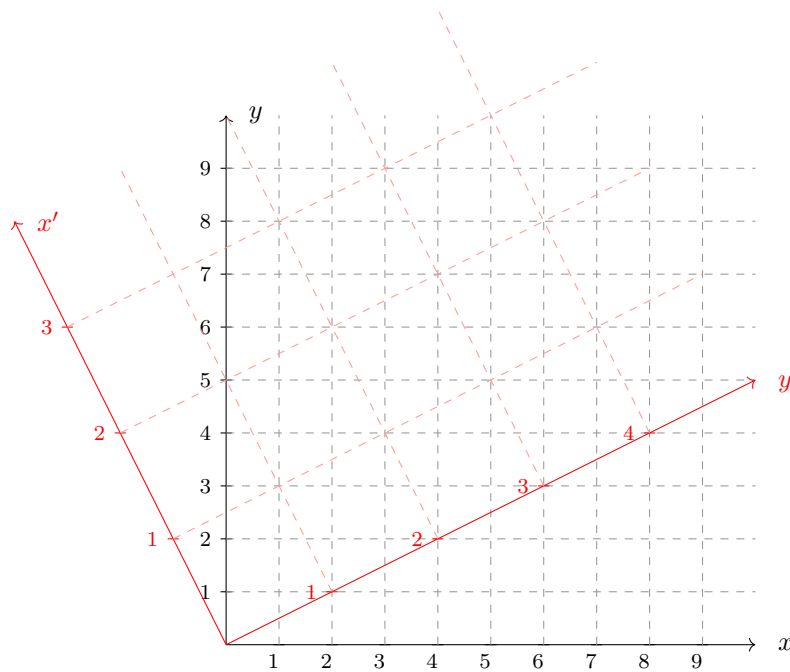
a) $\det(A)=3$



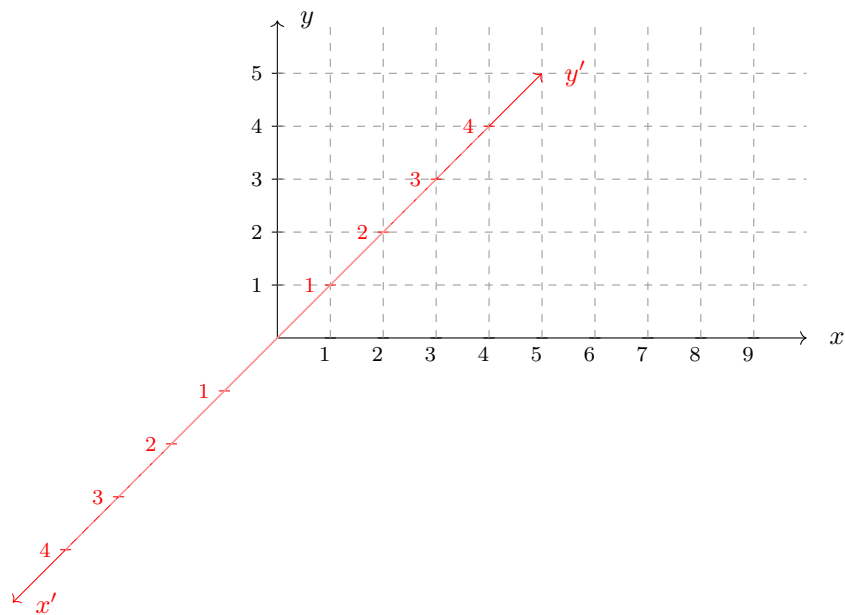
b) $\det(A)=-3$



c) $\det(A)=-5$



d) $\det(A)=0$



Zusammenhang:

Ist das neue Koordinatensystem ein Rechtssystem (Rechte Hand: Daumen: x -Achse, Zeigefinger: y -Achse), so ist die Determinante positiv, d.h. die Orientierung des Koordinatensystems bleibt erhalten und umgekehrt.

Begründung:

In der Formel-Herleitung der Determinante über das Skalarprodukt ($F = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$) erscheint der Sinus zwischen den beiden Vektoren. Dieser ist negativ, wenn der Winkel im Uhrzeigersinn gemessen wird, dann ist es nämlich eigentlich ein negativer Winkel (0° bis -180° oder 180° und 360° im Uhrzeigersinn)

6. für $t = -6$ ist die Determinante 0, d.h. die Matrix singulär und somit die Abbildung nicht umkehrbar

7.

a) 22 b) 0 c) 52 d) $-3\sqrt{6}$

b) ist singulär, die anderen regulär; d) ist orientierungsumkehrend, die anderen orientierungstreu

8.

i) a) 0 b) -12 c) 90
d) -4 e) -123 f) $-c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2$

ii) a) ist singulär, bei f) hängt die Klassifikation von der Wahl von c ab, die anderen sind regulär

iii) a) kann nicht klassifiziert werden betreffend der Orientierungserhaltung.

c) ist orientierungserhaltend; bei f) hängt die Orientierungserhaltung von der Wahl von c ab, alle anderen sind orientierungsumkehrend.

9. 9

$$10. V = \frac{1}{3} \left(\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right) \cdot \overrightarrow{AS} \right) = \frac{1}{3} \left(\left(\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \right) \right) = 288$$

$$11. V = \frac{1}{6} \left((\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right) = \frac{1}{6} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 4$$

12.

a) 275

b) -120

c) -120

13.

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

14.

a) (1, 2), (2, 1)

b) Es gibt 24 Permutationen. Wir stellen nicht alle dar.

15.

a) -1

b) +1

c) +1

16. Mit Leibniz bekommen wir

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

7. Kapitel

1.

a) $\lambda = 3$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, $\lambda = 4$ mit $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\lambda^2 - 12 = 0$, $\lambda_1 = \sqrt{12}$ mit $\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -\sqrt{12}$ mit $\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix}$

d) $\lambda^2 + 3$ keine reellen Eigenwerte

e) $\lambda^2 = 0$, $\lambda = 0$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $(1 - \lambda)^2 = 0$, $\lambda = 1$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, $\lambda_1 = 1$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2$ mit $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 3$ mit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $\lambda^3 - 2\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$ mit $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ mit $\begin{pmatrix} 15 + 5\sqrt{2} \\ -1 + 2\sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ mit $\begin{pmatrix} 15 - 5\sqrt{2} \\ -1 - 2\sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix}$

i) $\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = 0$, $\lambda = -8$ mit $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

j) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda = 2$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

k) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$, $\lambda = 2$ mit $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

l) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0$, $\lambda_1 = -4$ mit $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$ mit $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

m) $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3$, $\lambda_1 = 1$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$ mit $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 3$ mit $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

n) $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$,

$\lambda_1 = 2$ mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

 $\lambda_2 = 1$, also gilt für den Eigenvektor $3x - 5y + 3z = 0$, daraus liest man zwei linear unabhängige Vektoren

raus, z.B. $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

o) $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$, $\lambda_1 = 1$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$ mit $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = -1$ mit $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

p) $(\lambda - 4)^2(\lambda^2 + 3) = 0$, $\lambda = 4$ mit $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 18t = 0$ für $\lambda = 1 \pm \sqrt{-18t + 4}$

a) wenn $\lambda = 1$, also wenn $-18t + 4 = 0$, also für $t = \frac{2}{9}$, der Eigenvektor ist dann $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $t > \frac{2}{9}$

c) $t < \frac{2}{9}$, dann $\lambda = 1 \pm \sqrt{-18t + 4}$

d) $\lambda = 1 - \sqrt{-18t + 4} = -1$ für $t = 0$, und $\lambda_1 = -1$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = 3$ mit $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Octave-File: octiter1.m

4. Octave-File: octiter2.m
5. Octave-File: octiter3.m
6. Bob ist der ranghöchste Schimpanse, dann kommen gleich auf Cynthia und Nemo, ...
Octave-File: octiter3.m
- 7.

a) Wir entwickeln nach der ersten Spalte und erhalten somit

$$\lambda_1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = \lambda_1 \lambda_2 \begin{vmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} + 0 + 0 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$$

b) Verankerung für $n = 2$ (offensichtlich):

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$: Wir entwickeln nach der ersten Spalte und erhalten

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n+1} \end{vmatrix} + \underbrace{0 + \cdots + 0}_n$$

Die Induktionsannahme gibt uns dann direkt den Beweis.

8. $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Beziehung $A = SDS^{-1}$ folgt dann direkt mithilfe der Matrixmultiplikation.

9.

a) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $e^A = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+3)} + 5e^{\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+3)} + \sqrt{5}e^{3/2} + 5e^{3/2}}{10e^{\sqrt{5}/2}} & \frac{-\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+3)} + \sqrt{5}e^{3/2}}{5e^{\sqrt{5}/2}} \\ \frac{-\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+3)} + \sqrt{5}e^{3/2}}{5e^{\sqrt{5}/2}} & \frac{\sqrt{5}e^{\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+3)} + 5e^{\frac{1}{2}(2\sqrt{5}+3)} - 5e^{3/2} + 5e^{3/2}}{10e^{\sqrt{5}/2}} \end{pmatrix}$.

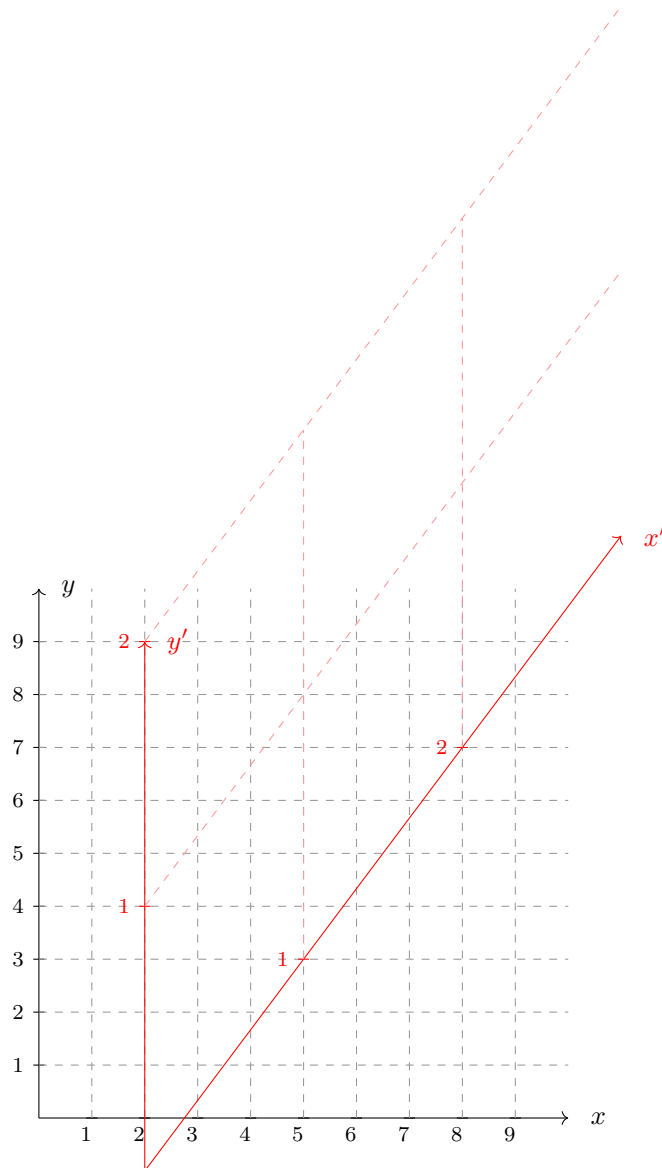
11. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, e^A = \begin{pmatrix} \frac{3e^5+2}{5e^4} & \frac{2e^5-2}{5e^4} \\ \frac{3e^5-3}{5e^4} & \frac{2e^5+3}{5e^4} \end{pmatrix}$.

8. Kapitel

1.

$$\text{a) } \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)



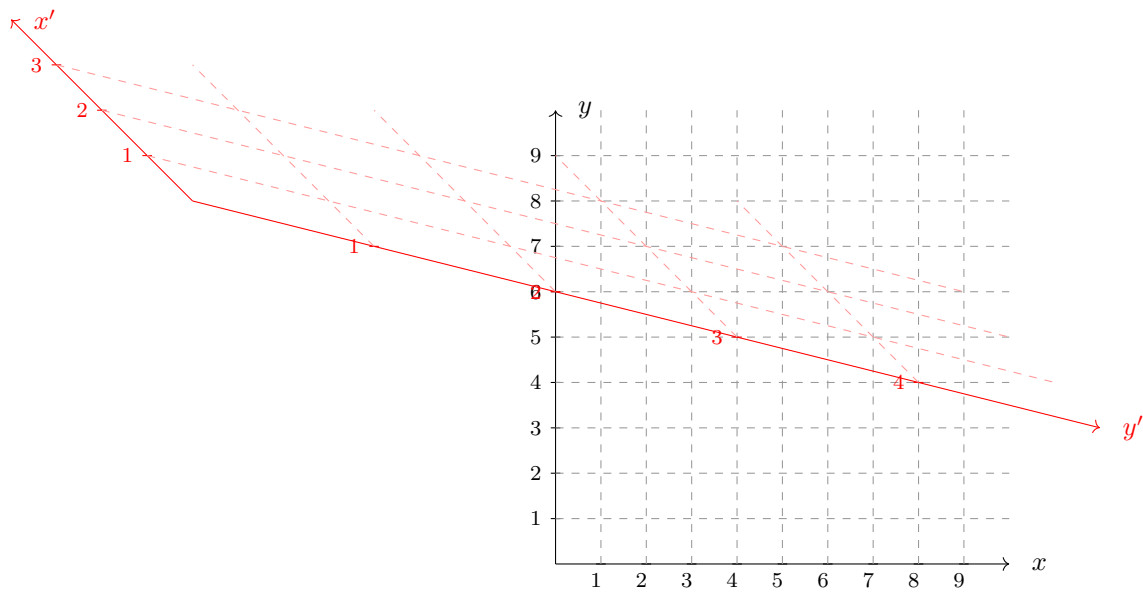
c) 15

d) $5 \cdot 15 = 75$

2.

$$\text{a) } \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)



c) -3

d) $(4 \cdot 3) \cdot 3 = 36$, die Abbildung ist orientierungsumkehrend, d.h. das Bildparallelogramm ist im Uhrzeigersinn nummeriert.

3.

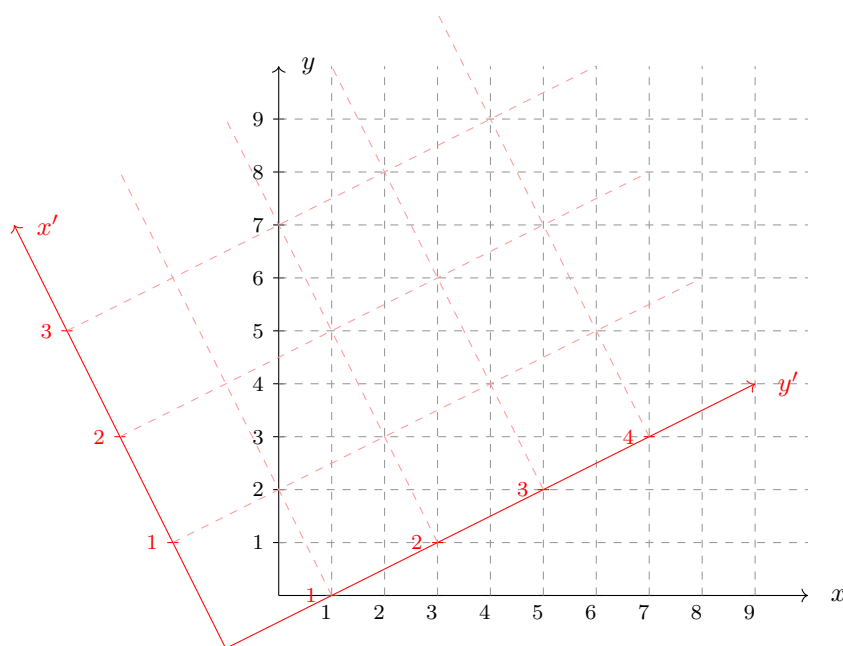
a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{2}{3} \\ 2 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5/2 & 1/2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

4.

a)



b) $\vec{x}' = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

5.

a) $\vec{x}' = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

b) nicht umkehrbar, da $\det(A) = 0$

c) $\vec{x}' = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -8 & -9 \\ -3 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$

6. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{6} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & t \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = 12$$

$$-16 - 4t + 8 + 12 = 72$$

$$|-4t + 4| = 72$$

Fallunterscheidung:

 $-4t + 4 \geq 0$, also $t \leq 1$, dann $-4t + 4 = 72$, also $t = -17$, was nicht geht, da $t > 0$ $-4t + 4 < 0$, also $t > 1$, dann $-(-4t + 4) = 72$, also $t = 19$ also erhält man $t = 19$ als einzige Lösung

7.

a) $\alpha \circ \beta : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

b) $\beta \circ \alpha : \vec{x}' = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

c) Die Matrizenabbildung ist nicht kommutativ (weil die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist).

Es ist z.B. nicht egal, ob ich erst spiegle und dann drehe oder umgekehrt.

8.

$$\alpha \circ \beta : \vec{x}' = A \cdot (B \cdot \vec{x} + \vec{b}) = A \cdot B \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9.

a) positiv

b) positiv

c) negativ

nur c) kehrt die Orientierung um (d.h. Determinante ist negativ), die anderen beiden sind orientierungserhaltend (d.h. Determinante ist positiv). Es entsteht immer eine Fläche, d.h. die beiden neuen Achsen sind nicht kollinear, d.h. die Determinante ist nicht 0.

10.

a) -8, die Abbildung ist orientierungsumkehrend und verachtfacht die Fläche

b) 3, die Abbildung ist orientierungserhaltend und verdreifacht das Volumen

c) -16, die Abbildung ist orientierungsumkehrend

11.

a) $F(3, 4)$

b) Fixpunktgerade: $3x + 2y = 5$

c) $F(\frac{1}{3}, -1, -\frac{4}{3})$

12.

Für $t = 4$ und $k = 2$ hat die Abbildung eine Fixpunktgerade: $2x - 3y = 2$.

Für $t = 4$ und $k \neq 2$ hat die Abbildung keinen Fixpunkt.

Für $t \neq 4$ hat die Abbildung den Fixpunkt $F(1 - \frac{3k-6}{2t-8}, \frac{-k+2}{t-4})$

13.

a) $\lambda_1 = 1$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -3$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) charakteristische Polynom: $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$,

$$\lambda_1 = 0 \text{ und } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2 \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_3 = 3 \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) charakteristische Polynom: $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$,

$$\lambda_1 = 0 \text{ und } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2 \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anhang

Die Lösungen zu den Aufgaben des Anhangs sind im File "octanhang.m|".